The **ScienceMath** Projekt: **Tonfunktionen**
Idee: Damjan Kobal,
Universität Ljubljana, Slowenien

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Unterrichtsmaterial

Tonfunktionen

Die digitale Technologie hat die elektronische Kommunikation revolutioniert. Eine einfache Idee, die auf dem Verständnis von stetigen und diskreten Funktionen basiert, kann die Bedeutung digitaler Technologien erklären, die es ermöglicht, immer mehr Informationen auf immer kleinere Medien zu packen. Insbesondere kann man durch stetige und diskrete Funktionen erklären, wie Dutzende Telefonate in eine Telefonleitung gepackt werden können.

Eine englische Version mit interaktiven Modulen befindet sich im Internet unter http://uc.fmf.uni-lj.si/com/Digimusic/digimusic.html. Wir empfehlen Ihnen, diese zu anzuschauen, da manche Ideen ihren Gehalt erst durch interaktive Module richtig entfalten können.

Einleitung

Viele mathematische Ideen können durch auditive Inhalte sinnvolle und intuitive Einblicke schaffen. Zum Beispiel: ordnet man jeder Ziffer genau einen Ton zu, kann man „mathematische Bedeutungen hören". Zum Beispiel eine endliche Dezimalzahl kann durch eine einfache (endliche) „Melodie" dargestellt sein:

$$0{,}75$$

Solche eine endliche Dezimalzahl stellt eine rationale Zahl dar, genauso wie Brüche:

$$124/999=0.124124124124124124124\ldots\ldots$$

Die wiederholende (periodische) „Melodie" beschreibt die „rationale Natur" einer rationalen Zahl. Irrationale Dezimalzahlen werden durch nicht wiederholende Melodien beschrieben. Wie könnte man den Unterschied zwischen einer rationalen und einer irrationalen Zahl besser beschreiben, als durch eine „unendliche sich nicht wiederholende Melodie? Zum Beispiel

$$\sqrt{2}=1.4142135623730950488016887242097\ldots$$

oder die wohlbekannte Zahl

$$\pi=3.1415926535897932384626433832795\ldots$$

In der Kommunikationstechnik ist es wichtig, dass jeder Ton, jede Unterhaltung, Aufnahme, … durch eine Funktion beschrieben werden kann. Wir wollen nicht ins Detail gehen, wie ein normaler Ton genau durch eine Funktion beschrieben werden kann. Zum Beispiel wissen Musiker, dass der Ton A durch die Funktion $\sin(\pi 440t)$ beschrieben werden kann und eine Oktave höher durch die Funktion:

$$\sin(2\pi 440t)$$

Auf diesem Wege können wir komplexere „Tonfunktionen“ erstellen:

$$\sin(34+\sin(950t))$$

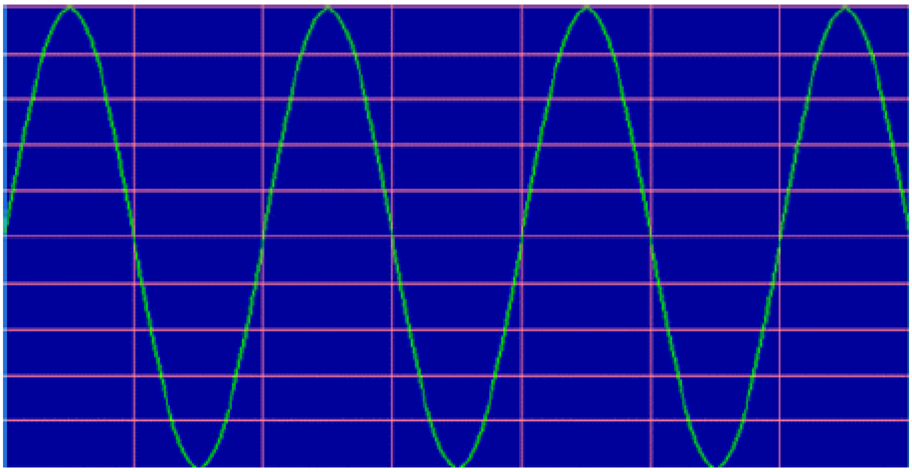
$$\sin(700t+35t\cdot\sin(123t))$$

$$\sin(700t+\cos(150t)+45t\cdot\sin(350t))$$

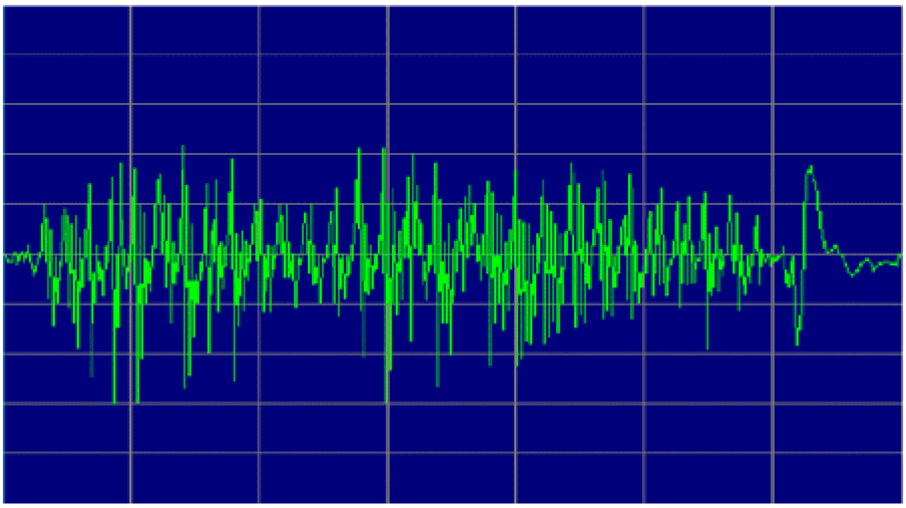
Die obenstehenden Funktionen können in der Internetversion abgespielt und angehört werden. Die Töne wurden durch das Programm Mathematica erstellt. Dort gibt es einen Befehl „Play“, der sehr ähnlich zum Befehl „Draw“ ist.

Digitale Technik und diskrete Funktionen

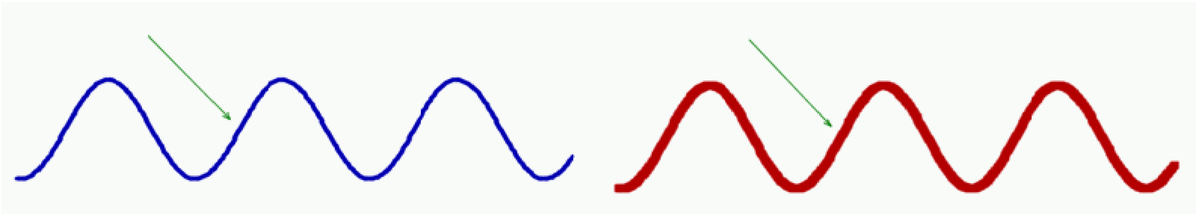
Funktionen, die „künstliche Töne“ oder reine Töne (d.h. die aus einer einzigen Frequenz bestehen) beschreiben, haben eine regelmäßige Form, wie dieser reine Ton, der durch eine Sinusfunktion beschrieben wird (ähnlich zu der vorigen Funktion des Tons A):



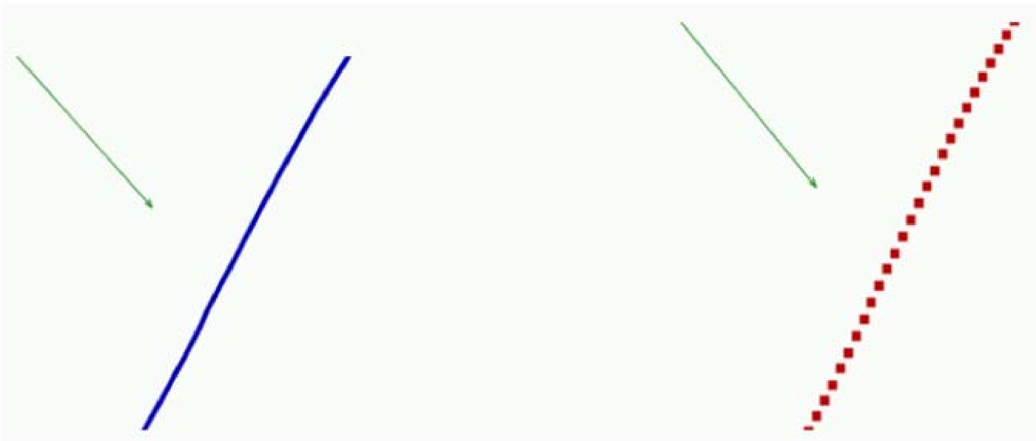
Das einfache Wort „Hallo“ ist eine viel kompliziertere Funktion als, die im oberen Graph zu sehende. Natürlich hängt das Aussehen einer Funktion stark von der Betrachtungsweise ab, d.h. wie stark wir in die Tiefe schauen…



Aber, egal welcher Ton, er ist immer durch eine Funktion darstellbar. Die wahre Form einer Tonfunktion ist für unsere Ideen nicht entscheidend. Daher, sagen wir einfach, dass wir im Grunde genommen jede Funktion mit einem Ton identifizieren können. Verschiedene Funktionen würden verschiedene Töne beschreiben. Beginnen wir mit einer einfachen Sinusfunktion:



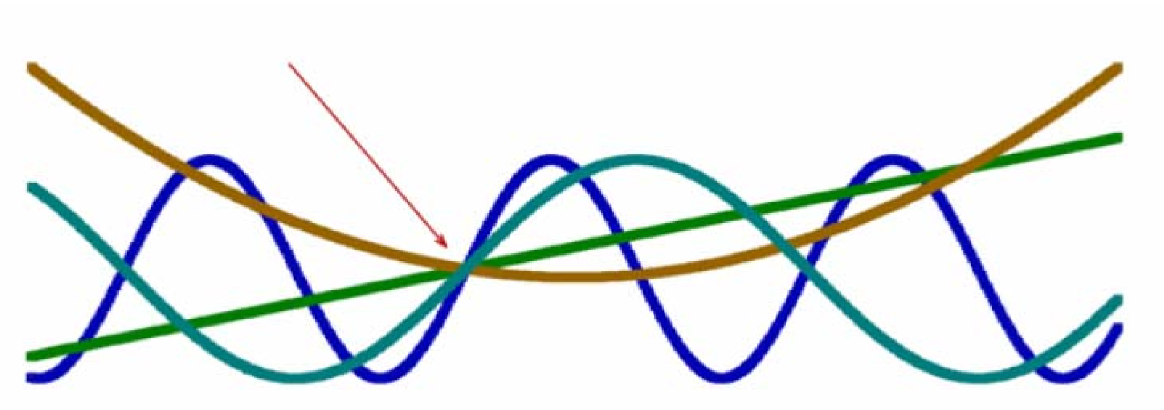
Wir zeichnen zwei Funktionen, die sich sehr ähnlich sehen. Stell Dir vor, dass die blaue Funktion einen Ton repräsentiert, der auf der einen Seite der Telefonleitung aufgenommen wurde und dass die dickere rote Funktion, der an der anderen Seite der Telefonleitung reproduzierte Ton darstellt. Die Funktionen sehen exakt gleich aus und es scheint so, dass die Telefongesellschaft eine gute Arbeit leistet, in dem sie eine perfekte Kopie eines Tons von einem Ende zum anderen überträgt. Aber lasst uns jetzt in doppelter Hinsicht einen genaueren Blick werfen und konzentrieren uns auf die beiden Graphen an jenem Gebiet, auf das der grünen Pfeil hinzeigt:



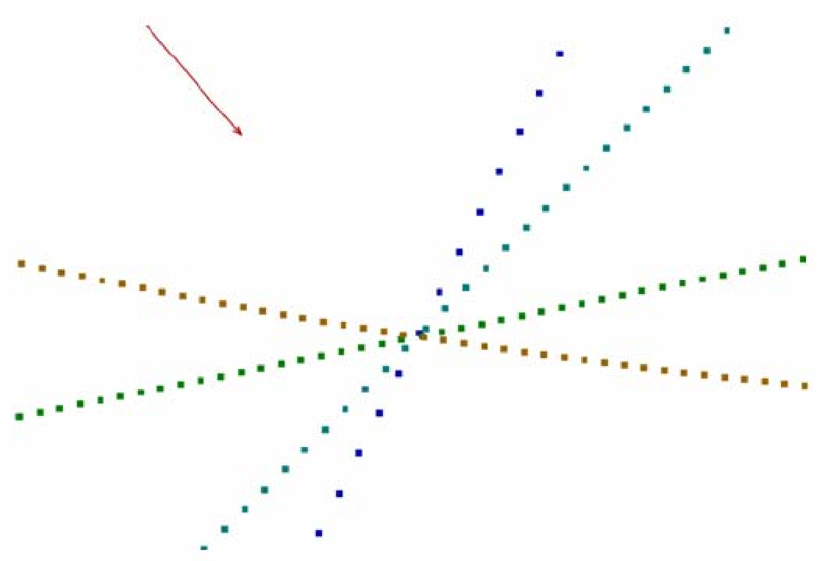
Der Telefonanbieter kann „tricksen“ und nur eine diskrete Funktion übertragen, die nur Punkte in gewissen Abständen enthält. Natürlich müssen diese Punkte dicht genug beieinander sein, so dass die Kunden beim Gespräch nicht irgendwelche „Lücken hören“. Wenn der Telefonanbieter einen Punkt nur alle fünf Minuten übertragen würde, würden wir sicherlich nichts hören. Aber wenn man sich einen Punkt immer nach einer millionsten Sekunde vorstellt, würde man eine „sehr glatte“ Funktion bekommen. Der obige rechte Graph ist von derselben Sinusfunktion. Die blaue ist die dazugehörige stetige Funktion, während die Rote nur rund 150 Punkte pro Periode der Sinusfunktion besitzt. Was gewinnt der Telefonanbieter dadurch? Wenn wir einen Punkt zeichnen, zeichnen wir ihn mit einer gewissen Stärke/Dicke. Aber die eigentliche Dicke des Punkts ist 0. Stell dir vor, dass wir die rote Funktion noch genauer betrachten. Was wir dadurch bekommen sieht dann so aus:

Es ist jetzt ziemlich offensichtlich, warum der Telefonanbieter so trickst. Da die Technik schon lange das Rennen gegen die menschliche Wahrnehmungsgrenze gewonnen hat und die Zeit in viel kleinere Abschnitte zerstückeln kann, als es das menschliche Ohr wahrnehmen kann, bietet die Technologie dem Anbieter viele freie Zeitabschnitte. Die Mindestdichte der Punkte ist durch die menschliche Wahrnehmungsgrenze vorgegeben. Falls die Technologie die Zeitabschnitte in ein Zehntel dessen was das menschliche Ohr wahrnimmt einteilt, kann das Gerät so programmiert sein, dass es „nur“ bei einem Zehntel der Zeit zuhört und neunmal so viele Zeitabschnitte noch zur Verfügung stehen. Im Grunde können wir sehen, dass wir in die obigen roten Punkte der diskreten Funktion, noch 9 weitere Punkte reinpacken können.

Betrachten wir nun den Graphen vier verschiedener Funktionen. Wir wählten Funktionen, die sich in einem Punkt schneiden (der durch den roten Pfeil angezeigt wird), um unsere Idee besser zu erklären. Es scheint so, als haben wir „eindeutig beschriebene Funktionen“. Es ist klar, dass wenn wir Funktionen mit Tönen verknüpfen, könnte dieses Bild einfach auf vier verschiedene Töne übertragen werden. Das ist im Grunde genommen, der Trick der digitalen Technik. Leute, die telefonieren und Kunden, die Audiotechnologien nutzen, haben eine sehr begrenzte Wahrnehmung und können dadurch getäuscht werden, dass sie im unteren Bild wirklich vier verschiedene Töne hören; wobei wir (exakt) mathematisch gesehen, nicht einmal eine Funktion auf dem ganzen sichtbaren Intervall haben.



Um besser sehen und verstehen zu können, über was wir reden, betrachten wir den Schnittpunkt noch mal etwas genauer, der durch den roten Pfeil angedeutet ist.



Ein noch genauerer Blick enthüllt uns ein komplett verschiedenes Bild:

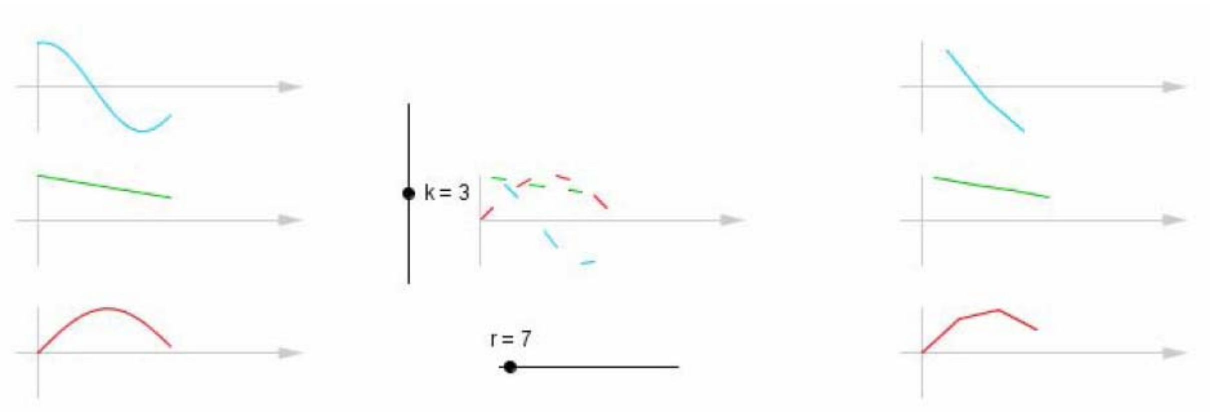
Wir sehen, dass „viel weniger als eine digitale“ Funktion ausreicht, um genug Informationen zu enthalten, so dass sie vier verschiedene Funktionen reproduziert. Diese Funktionen sind immer noch genau genug, um alle notwendigen Informationen zu besitzen, so dass ein menschliches Ohr einen „stetigen“ Ton hört.

Wenn man die Essenz der Funktionen und diskreten Funktionen versteht, erscheint es offensichtlich, dass dieser Prozess unbegrenzt fortgeführt werden kann. Wie viele Funktionen können in eine diskrete Funktion reingepackt werden? Wie viele Telefongespräche können in eine einzige Telefonleitung gepackt werden? Natürlich hängt das von der notwendigen Klangqualität (Dichte der diskreten Punkte, die eine bestimmte Funktion repräsentieren) und den technischen Möglichkeiten, immer kleinere Zeitabschnitte aufzunehmen.

In Wirklichkeit, nimmt das Gerät nicht nur Teile einer Unterhaltung auf gleichmäßig ausgestreckten Intervallen auf, sondern nimmt sämtliche Konversationen auf und übermittelt nur Durchschnittswerte für diese kurzen Zeitabschnitte.

In der Internetversion dieses Entwurfs kann man die aufgenommenen Töne und die übermittelten Töne betrachten. Dieses Applet simuliert schön, wie Töne übertragen werden.

Links sehen wir drei Kanäle (drei verschiedene Töne), in der Mitte sehen wir, wie viel Informationen das Gerät von jedem Kanal aufnimmt und rechts die wiederhergestellten Funktionen (Töne). Durch Verändern der Auflösung (r), also der Dichte, der Feineinstellung des Gerät, können wir recht authentische Töne auf der rechten Seite reproduzieren, selbst wenn wir die Anzahl der Kanäle (k) in der Telefonleitung (Funktion) erhöhen.



Mit moderner Computertechnologie kann diese wunderschöne und einfache Idee durch dynamische Darstellungen von Funktionen simuliert werden. Durch „herein- und herauszoomen“ kann man schön und intuitiv veranschaulichen, wie sich im Vergleich zu Gehör und Auge diskrete und stetige Funktionen unterscheiden.

Schließlich kann diese Idee durch eine lustige aber auch bedeutsame Parallele vermittelt werden. Angenommen eine Klasse würde eine Klassenarbeit schreiben und der Lehrer hätte dafür zu sorgen, dass die Schülerinnen und Schüler nicht abschreiben. Wenn der Lehrer das Klassenzimmer verlässt, sind die Schülerinnen und Schüler geneigt sich zu unterhalten und abzuschreiben. Deshalb ist es schwer sich vorzustellen, wie derselbe Lehrer zwei verschiedene Klassen in verschiedenen Räumen beaufsichtigen kann, da er gezwungen ist mindestens eine Klasse unbeaufsichtigt zu lassen. Aber wie lange? Stelle Dir vor, das scharfe Auge des Lehrers beobachtet einen jede Sekunde … . Wenn du dir theoretisch vorstellst, dass der Lehrer seine volle Präsenz und Aufmerksamkeit von einer Klasse zu einer anderen innerhalb einer Zehntelsekunde wechseln könnte, ist es dann nicht offensichtlich, dass unter jenen Umständen solch ein schneller Lehrer nicht nur zwei sondern gleichzeitig zehn Klassen beaufsichtigen könnte?

Interaktive Simulation

Interaktive Computer Simulationen, die diese Ideen sehr gut unterstützen, können im Internet gesehen und gehört werden:

http://uc.fmf.uni-lj.si/com/Digimusic/digimusic.html

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.