Idee: Astrid Beckmann,
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Deutschland

Hintergrund

Allgemeiner didaktischer Hintergrund

Ausgangspunkt ist ein fächerübergreifender Ansatz mit den Naturwissenschaften, hier mit der Biologie. Durch außermathematische Bezüge sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe naturwissenschaftlicher Kontexte und Methoden soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen, andererseits die Vielseitigkeit mathematischer Begriffe erfahren werden.

Naturwissenschaftliche Inhalte bieten die Chance für einen wirklichkeitsnahen Unterricht. Konkrete physikalische oder biologische Zusammenhänge können mathematische Modellierungsaktivitäten anregen und zu authentischen Erfahrungen führen. Mathematische Inhalte und Methoden werden in sinnvollen Zusammenhängen gelernt; die Realität der Schülerinnen und Schüler kann mit mathematischer Einsicht erweitert werden. Unterschiedliche Realitätsbezüge führen auf unterschiedliche Modelle und können somit auch zur Kontrastierung von begrifflichen Eigenschaften und von verschiedenen Modellen beitragen. Die Vielfalt naturwissenschaftlicher Phänomene gestattet offene Aufgabenstellungen und damit ein selbstständiges Erarbeiten der Mathematik. Unterschiedliche Realitätsbezüge führen auf vielseitige Bedeutungszusammenhänge.

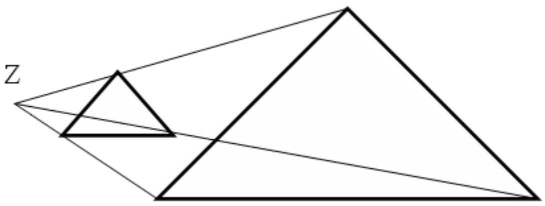
Biologischer und mathematischer Hintergrund

Masse bzw. Volumen und Oberfläche sind charakteristische Größen, die Rückschlüsse auf das Leben und Verhalten von Tieren zulassen. Entscheidend ist insbesondere das Verhältnis von Volumen (Masse) zu Oberfläche. Dies wird im Folgenden näher untersucht.

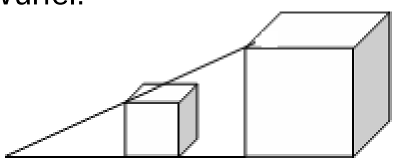
Um die biologischen Überlegungen zu verstehen, sind zunächst die mathematischen Grundlagen zu klären.

1. Der Begriff der Ähnlichkeit:

> Zwei Körper sind ähnlich, wenn sie durch zentrische Streckung ineinander überführt werden können.
>
> Beispiel: Ähnliche Dreiecke



Beispiel: Ähnliche Würfel:



In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkelgrößen gleich.
Mit einem Streckfaktor k gilt

- für die Längenverhältnisse: $l_2 = k \cdot l_1$ bzw. $\frac{l_2}{l_1} = k$
- für die (Ober-)Flächenverhältnisse: $O_2 = k^2 \cdot O_1$ bzw. $\frac{O_2}{O_1} = k^2$
- für die Volumenverhältnisse: $V_2 = k^3 \cdot V_1$ bzw. $\frac{V_2}{V_1} = k^3$.

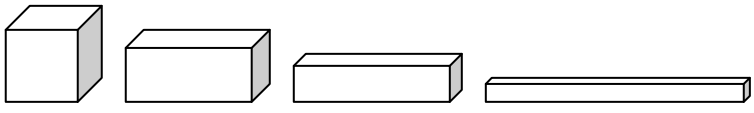
2. Es ist wichtig zu wissen, dass Körper mit demselben Volumen ganz unterschiedliche Oberflächen haben können. Dies kann mit mathematischen Kenntnissen erarbeitet werden.

Wir betrachten dazu einen Würfel mit den Kantenlängen 1m, also mit einem Volumen von 1 m³ und einer Oberfläche von 6m². Dieser Würfel hat die Proportionen der Seitenlängen 1:1:1.
Wird diese Proportion zu 1:1:2 verändert, führt dies zu einer „Verschlankung“ des Würfels zu einem Quader, wenn er dasselbe Volumen von 1 m³ haben soll. Seine Seitenlängen a bzw. 2a errechnen sich aus $a^2 \cdot 2a = 1 \rightarrow a = \sqrt[3]{0,5} = 0,79$. Die Oberfläche ergibt sich zu ca. 6,3 m².

Die folgende Tabelle zeigt, wie ein anderes Längenverhältnis zu immer größerem Oberflächeninhalt bei gleichem Volumen führt. Bei gleicher Dichte ist das Volumen zur Masse proportional, so dass die Überlegungen gleichermaßen für Volumen und Masse gelten.

Proportion	Volumen in m³	Oberfläche in m²	Verhältnis von Oberfläche zu Volumen
1:1:1	1² ·1	6	6/m
1:1:2	0,79² · 1,59	6,3	6,3/m
1:1:4	0,63² · 2,52	7,1	7,1/m
1:1:8	0,5² · 4	8,5	8,5/m
1:1:16	0,4² · 6,35	10,4	10,4/m
1:1:32	0,31²· 10,08	12,9	12,9/m

Die einhergehende Veränderung der Körperform deuten die folgenden Quader an.



Die biologischen Konsequenzen aus der Bedeutung des Verhältnisses von Oberfläche zu Volumen zeigen sich bei spezifischen Körperformen und Verhaltensweisen der Tiere.

a) Es gibt Insekten mit unterschiedlichem Schlankheitsgrad, aber gleicher Masse.
Für viele Insekten ist zum Leben offensichtlich ein bestimmtes Volumen angemessen. Je nach Lebensart allerdings unterscheiden sich ihre Körperformen. Beispielsweise ist eine Libelle sehr schlank, um schnell fliegen zu können, ein Käfer hingegen ist dicker und gepanzert, da er sich zum Beispiel auch viel am Boden bewegt.

b) Insekten sind klein.
Die Sauerstoffversorgung erfolgt bei Insekten über Tracheen. Das sind Röhrensysteme im Chitinpanzer. Der Austausch erfolgt also über die Körperoberfläche der Insekten. Je größer das Gewicht des Insekts ist, desto mehr Sauerstoff benötigt es. Ab ca. 15 cm Länge wird das Verhältnis Volumen zu Oberfläche so ungünstig, dass die Sauerstoffversorgung nicht mehr ausreicht. Das schwerste Insekt ist der Goliathkäfer, der nur bis zu 12 cm lang wird.

c) Tiere, deren Sauerstoffversorgung über das Blut erfolgt, können sehr groß werden.
Die Blutmenge nimmt hier mit dem Volumen des Tiers zu. Je mehr Blut fließt, desto mehr Sauerstoff kann transportiert werden. Es kommt also zu keinem Missverhältnis wie bei den Insekten.

d) Warmblüter müssen eine Minimalgröße haben.
Kleine Tiere haben eine kleine Körpermasse und damit auch nur eine kleine Blutmenge, die den Körper mit Wärme versorgt. Über die Oberfläche wird ständig Wärme abgegeben. Das kleinste Säugetier, bei dem das Verhältnis zwischen Volumen und Oberfläche gerade ausreicht, ist die Spitzmaus; der kleinste Vogel ist eine Kolibriart (2,5 kg).

e) Kleine Warmblüter müssen ständig energiereiche Kost zu sich nehmen.
Wenn das Verhältnis zwischen Masse und Oberfläche so ungünstig ist wie beim Kolibri oder der Spitzmaus, muss zum Überleben ständig Energie aufgenommen werden. Tatsächlich fressen diese kleinen Tiere ständig, und zwar möglichst energiereichen Nektar. Andererseits lässt sich beobachten, dass Tiere mit günstigeren Verhältnissen wie beim Löwen oder auch beim Menschen, stundenlang ohne Nahrung auskommen können.

f) Kleine und große Tiere unterscheiden sich in ihrer relativen Körperkraft.
Kleine und große Tiere erscheinen durchaus ähnlich. Dennoch unterscheiden sie sich – relativ gesehen – in verschiedenen Eigenschaften, etwa in der Fähigkeit, in Bezug auf das eigene Körpergewicht große Massen tragen zu können.

Beispiel:
Eine Zwergspitzmaus ist ca. 4,3 cm lang, ein Elefant ist ca. 3,5 m lang.
Damit ergibt sich ein Streckfaktor von 814.

Anhand eines Massenvergleichs bei Elefant (4000 kg) und Spitzmaus (ca. 2,5 kg) zeigt sich, dass sie aber nicht einheitlich dieselben Proportionen haben. Insbesondere zeigt sich dies in einer unproportionalen Querschnittsvergrößerung der Muskeln, etwa der Beine, um das eigene Körpergewicht tragen zu können. Damit kann ein Elefant zwar absolut mehr tragen als eine Spitzmaus, relativ gesehen aber wesentlich weniger.

Idee: Astrid Beckmann,
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Deutschland

f) Allometrien im Tierreich

Im Tierreich gibt es offensichtlich keine exakten Ähnlichkeiten zwischen Tieren. Stattdessen sprechen Biologinnen und Biologen von Allometrien, was unterschiedliche Proportionen (zum Beispiel einzelner Organe und Gliedmaßen) bei ähnlich wirkenden Tierarten beschreibt. Durch Vergleich der Massen oder durch Ausmessen an lebenden Tieren oder Tierfotos lassen sich die Allometrien von äußerlich ähnlichen Tieren wie Hauskatze und Tiger oder Jungtier und Eltern durch Berechnung der Proportionen feststellen.

Beispiel: $\frac{m_{Tiger}}{m_{Hauskatze}} = \frac{100kg}{5kg} = 20$ Streckfaktor ist damit: $k = \sqrt[3]{20} = 2{,}7$

Die Schulterhöhen verhalten sich wie 1:2,7, während sich aber die Oberflächen wie 1: 7,3 verhalten.


Bildquellen: www.pixelio.de, ID 39073, 194658)

Allometrien haben oft biologische Gründe wie zum Beispiel die unterschiedliche Bedeutung innerer Organe oder das „Kindchenschema“, wonach Jungtiere einen eher größeren Kopf haben, um niedlich zu wirken und damit ein Schutzverhalten bei den Elterntieren anzuregen.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.