The **ScienceMath**-project: **Migetalkarji**
Ideja: Claus Michelsen, Jan-Alexis Nielsen
University of Southern Denmark, Danska

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Migetalkarji

Migetalkarji (parameciji) so enocelični organizmi, ki živijo v vodi. Marsikje na Zemlji lahko najdemo primerne življenjske razmere za njihov razvoj. Značilnost migetalkarjev je, da so pokriti z migetalkami, ki jih nenehoma premikajo v določeni smeri in potiskajo paramecij naprej. Migetalkarji se hranijo z bakterijami, ki živijo na razpadajočih živalih. V ekosistemu igrajo pomembno vlogo, saj so hrana manjšim živalim, na primer ličinkam.
Razmnožujejo se lahko nespolno z delitvijo ali spolno s konjugacijo, ki je podobna prenosu genetskega zapisa pri višje razvitih organizmih (na primer bakterijah).

Naloga 1: Izpolnite tabelo 1. Z izpolnjevanjem lahko prenehate, ko iz tabele razberete vzorec. Nato narišite naslednje grafe:

a) N v koordinatnem sistemu (N, t),
b) N´(t) v koordinatnem sistemu (N´(t), t),
c) N´(t)/N(t) v koordinatnem sistemu (N´(t)/N(t), N(t)).

Katere povezave pokažejo grafi in katere informacije o populaciji migetalkarjev v poizkusu podajajo? Kako bi lahko ugotovili, ali je ta poizkus primer logistične rasti?

Naloga 2: Kako si predstavljate graf hitrost rasti od hitrosti rasti N´(t)? Zakaj bi lahko bila ta informacija uporabna? Lahko si pomagate s primerom – recimo $f(x) = x^3$ – in se vprašate: »Kaj je diferencial od f´(x) oziroma, kaj je diferencial od diferenciala od f(x)?«

Naloga 3: Kadar opisujemo kakšno populacijo, na primer migetalkarjev, in ugotovimo, da je tip rasti logistična rast, lahko naredimo naslednji osnovni model, ki bo ustrezal našim podatkom: $N(t) = K/(1+((K-N_0)/N_0)e^{-rt})$

Ta enačba se imenuje logistična enačba. Količine so definirane takole:

N(t)	Velikost populacije ob času *t*
K	Maksimalna velikost populacije, ki jo lahko vzdržuje okolje
N_0	Začetna velikost populacije – tj. *N(0)*
r	Stopnja rasti populacije

V tabeli 1 lahko najdete dobre predloge za vrednosti količin *K* in N_0. Poskusite narediti oceno za vrednost količine *r* in preverite, če se graf vašega modela ujema s podatki.

Zakaj je logistična enačba takšne oblike kot je?

Najprej se vprašajmo, kaj določa, kako populacija raste. Poznamo razmerje med številom migetalkarjev, ki umrejo v enoti časa in številom migetalkarjev, ki se rodijo v enoti časa. To razmerje se pogosto imenuje stopnja rasti *r* populacije in opisuje porast števila migetalkarjev v obstoječi populaciji v enoti časa. Poenostavljeno bi lahko dejali, da je *sprememba populacije v danem času enaka rN(t)*. Ampak potem bi populacija rasla s konstantno hitrostjo. To pa ni v skladu s podatki iz poizkusa, saj populacija na začetku narašča počasi (zaradi majhnega števila migetalkarjev) nato pa vedno bolj hitro, dokler se spet ne upočasni (ker lahko v okolju preživi le maksimalna velikost populacije – označili smo jo s *K*). Eden izmed načinov opisa rasti je, da je populacija v katerem koli času *t* enaka *rN(t)(1-N(t)/K)*. Sami lahko premislite, kakšen pomen ima faktor *1-N(t)/K* (raziščite, kaj se zgodi, kadar je *N(t)* zelo majhen in kadar je skoraj tako velik kot *K*). Ker pa izraz *rN(t)(1-N(t)/K)* predstavlja spremembo v populaciji, sledi *rN(t)(1-N(t)/K)* = *dN(t)/dt*. Logistična enačba pa je ravno integral *dN(t)/dt* – tj. *N(t)*.

Tabela 1

Ure *t*	Velikost populacije *N*	Ocenjena hitrost rasti
0	2	
3	3	
6	4	
9	5	
12	6	
15	8	
18	11	
21	15	
24	19	
27	25	
30	33	
33	43	
36	55	
39	70	
42	88	
45	108	
48	132	
51	158	
54	184	
57	211	
60	237	
63	261	
66	283	
69	301	
72	317	
75	330	
78	340	
81	348	
84	355	
87	359	
90	363	
93	366	
96	368	
99	370	
102	371	
105	372	
108	373	
111	373	
114	374	
117	374	
120	374	
123	374	
126	375	
129	375	
132	375	
135	375	

Paramaecium aurelia, Wikipedia

Naloga 4: (a) Z besedami opišite, kaj razumete pod besedo »funkcija«. Pojasnite, kako se funkcije uporabljajo v povezavi s sestavljanjem modela in opišite, katere informacije lahko dobite iz grafov:

i. $f(x)$ v koordinatnem sistemu $(f(x), x)$,
ii. $f'(x)$ v koordinatnem sistemu $(f'(x), x)$,
iii. $f'(x)/f(x)$ v koordinatnem sistemu $(f'(x)/f(x), f(x))$.

(b) Z besedami opišite različne možnosti, ki jih ponuja uporaba diferencialnega in integralnega računa pri delu z modeli.

Ta projekt se financira s podporo Evropske komisije. Ta publikacija izraža le stališča avtorja ali avtorjev in Komisija ne odgovarja za kakršno koli uporabo v njej navedenih informacij.