Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Pantoffeltierchen

Pantoffeltierchen sind Einzeller und leben in Wasser und können in vielen Lebensräumen der Erde leben. Ihre Membran besteht aus kleinen Flimmerhärchen, die sich konstant gleichförmig in eine bestimmte Richtung bewegen. Die Hauptaufgabe der Flimmerhärchen ist die Fortbewegung des Pantoffeltierchens. Sie ernähren sich von Bakterien, die auf verwesenden Pflanzen siedeln. Pantoffeltierchen spielen eine wichtige Rolle im Ökosystem, da sie unter anderem Nahrung für Larven sind. Sie vermehren sich ungeschlechtlich durch Zellteilung oder durch Konjugation, d.h. durch Austausch von Erbgut, wie bei höher entwickelten Lebewesen.

Aufgabe 1:
Fülle Tabelle 1 auf der letzten Seite aus. (Du kannst mit dem Ausfüllen aufhören, wenn du einen Gesamteindruck gewonnen hast). Zeichne danach die Graphen von

a) N in einem (N,t) Koordinatensystem
b) N'(t) in einem (N',t) Koordinatensystem
c) $\frac{N'(t)}{N(t)}$ in einem $(\frac{N'}{N}, N)$ Koordinatensystem

Welche Beziehungen werden durch die Graphen dargestellt? Welche Informationen liefern diese über die Pantoffeltierchenpopulation? Wie kannst Du herausfinden, ob wir Zeugen eines Beispiels von logistischem Wachstum sind?

Aufgabe 2:
Wie würde der Graph der momentanen Änderungsrate von der Änderungsrate N' aussehen? Für was könnte diese Information gut sein? Benutze vielleicht ein Beispiel – wie $f(x)=x^3$ - und frage dich: „Was ist der Differentialquotient von f'? – d.h. der Differentialquotient des Differentialquotienten von f?"

Aufgabe 3:
Wenn Du zum Beispiel die Population von Pantoffeltierchen modellierst und hast dort logistisches Wachstum festgestellt, kannst Du probieren, deine Daten an das elementare Modell von logistischem Wachstum anzupassen:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}$$

Diese Gleichung nennt man *logistische Gleichung.* Die Parameter bedeuten im Einzelnen:

N(t)	Population zum Zeitpunkt t
K	die maximale Population, die unter den gegeben Lebensbedingungen leben kann
N_0	die anfängliche Population, d.h. N(0)
r	Die Wachstumsrate der Population

Beim Betrachten von Tabelle 1 kannst du gute Schätzungen für die Werte von K und N_0 finden – versuche Werte für r zu raten und überprüfe, ob diese zu deinem Graphen passen.

Warum sieht die logistische Gleichung so aus?
Starten wir mit der Frage: „Welcher Faktor bestimmt denn, wie die Population wächst?" Zuerst einmal gibt es die Beziehung zwischen den sterbenden Individuen pro Zeiteinheit und den neu entstehenden Individuen pro Zeiteinheit. Diese Beziehung wird oft als Wachstumsrate r bezeichnet und beschreibt die Änderung der Anzahl der Pantoffeltierchen pro Zeiteinheit. Einfacher ausgedrückt, kann man sagen: Die Änderung der Population zu einem Zeitpunkt t ist gegeben durch rN(t). Aber dann würde die Population mit gleicher Geschwindigkeit zunehmen. Aber dies ist nicht im Einklang mit den echten Daten, da eine Population zuerst langsam wächst (geringe Anzahl an Individuen) und dann immer schneller bis sie wieder langsamer wächst (da das Umfeld nur eine maximale Anzahl – hier K – zulässt). Eine Möglichkeit wäre die Population zu einer beliebigen Zeit t durch $rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)$ zu beschreiben.

Überleg Dir, welchen Effekt der Term $\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)$ hat

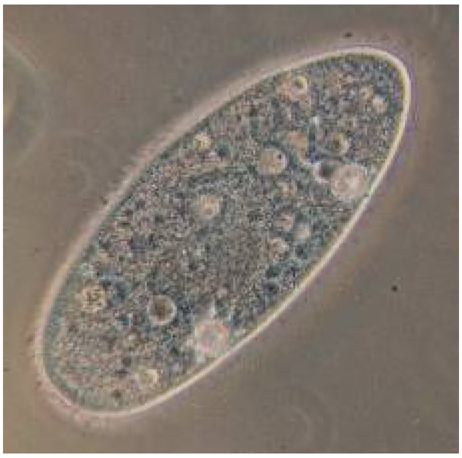
(untersuche den Term bei kleinen Populationen und bei Populationen, die fast so groß sind wie K).

Aber da $rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)$ für die lokale *Änderung* der Population steht, folgt dass $rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)=\frac{dN}{dt}$. Die logistische Gleichung erhalt man durch Integration von $\frac{dN}{dt}$, d.h. die logistische Gleichung steht für N(t).

The **ScienceMath** Projekt: **Pantoffeltierchen**
Idee: Claus Michelsen & Jan-Alexis Nielsen
Syddansk Universitet, Odense

Tabelle 1:

Zeit in h t	Populationsgröße N	geschätzte Werte der Wachstumsgeschwindigkeit
0	2	
3	3	
6	4	
9	5	
12	6	
15	8	
18	11	
21	15	
24	19	
27	25	
30	33	
36	55	
39	70	
42	88	
45	108	
48	132	
51	158	
54	184	
57	211	
60	237	
63	261	
66	283	
69	301	
72	317	
75	330	
78	340	
81	348	
84	355	
87	359	
90	363	
93	366	
96	368	
99	370	
102	371	
105	372	
108	373	
111	373	
114	374	
117	374	
120	374	
123	374	
126	375	
129	375	
132	375	
135	375	



Aus Wikpadia

Aufgabe 4:

(a) Beschreibe in eigenen Worten was du unter dem Wort „Funktion“ verstehst? Beschreibe wie Funktionen bei Modellierungsprozessen oft benutzt werden und welche Informationen du aus folgenden Termen bekommen kannst

i) f(x) in einem (f,x) Koordinatensystem
ii) f'(x) in einem (f',x) Koordinatensystem
iii) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ in einem $\left(\frac{f'}{f}, f\right)$ Koordinatensystem

(b) Beschreibe die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Differential- und Integralrechnung in Modellierungsprozessen.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.