The **ScienceMath**-project: **Tøffeldyr**
Idea: Claus Michelsen & Jan Alexis Nielsen,
Syddansk Universitet Odense, Denmark

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

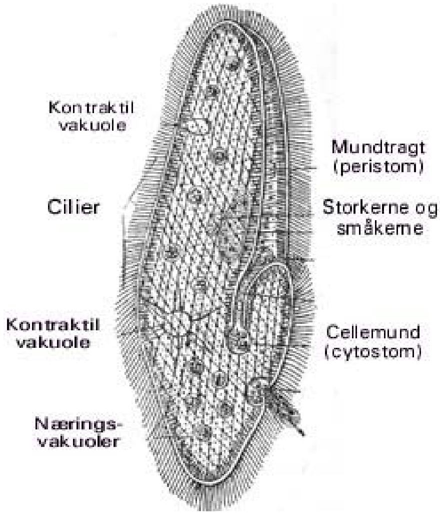
Undervisningsmaterialie

Ark til studerende og opgaver

Tøffeldyr

Tøffeldyr (*paramecia*) er encellede organismer, der lever i vand og har passende leveforhold mange steder på kloden. De er karakteriseret ved, at deres yderside er dækket af små cilier - fimrehår - der hele tiden bevæger sig ved at slå i en bestemt retning. Disse fimrehår har en primær funktion i at drive parameciaet fremad i vandet. Tøffeldyr ernærer sig ved at spise de bakterier, der følger i kølvandet på organisk materiale i forrådnelse. I økosystemer spiller tøffeldyr en vigtig rolle som føde for mindre dyr såsom regnbuefiskelarver.

Tøffeldyr kan reproducere sig ved både ukønnet formering – celledeling – og ved kønnet konjugation, der minder meget om overførslen af genetisk materiale, man finder hos mere komplekse dyr.



Tegning af Tøffeldyr: *Paramaecium caudatum*. Efter Mogens Lund: Biologi; Gyldendal 1970

Opgave 1.1: Udfyld Tabel 1 på næste side (det er ok kun at fortsætte indtil det overordnede indtryk fremkommer). Skitsér derefter grafen for

a) N i et (N, t) koordinatsystem

b) $N'(t)$ i et $(N'(t), t)$ koordinatsystem

c) $\frac{N'(t)}{N(t)}$ i et $\left(\frac{N'(t)}{N(t)}, N(t)\right)$ koordinatsystem

Hvilke sammenhænge viser graferne og hvilke informationer giver det dig om bestanden af tøffeldyr i forsøget? Hvad siger din grundbog om, hvordan du kan finde ud af, om der faktisk er tale om logistisk vækst?

Tabel 1

Timer t	Antal Tøffeldyr N	Estimerede værdier for væksthastigheden		Timer t	Antal Tøffeldyr N	Estimerede værdier for væksthastigheden
0	2			60	237	
3	3			63	261	
6	4			66	283	
9	5			69	301	
12	6			72	317	
15	8			75	330	
18	11			78	340	
21	15			81	348	
24	19			84	355	
27	25			87	359	
30	33			90	363	
33	43			93	366	
36	55			96	368	
39	70			99	370	
42	88			102	371	
45	108			105	372	
48	132			108	373	
51	158			111	373	
54	184			114	374	
57	211			117	374	
				120	374	
				123	374	
				126	375	
				129	375	
				132	375	
				135	375	

Opgave 1.2: Hvordan forestiller du dig at en graf, der beskriver *væksthastigheden af væksthastigheden* $N'(t)$ ser ud? Og hvad kan man bruge den til? Brug gerne et eksempel som $f(x) = x^3$ og stil dig selv følgende spørgsmål: "Hvad er differentialkvotienten for $f'(x)$ – altså differentialkvotienten for differentialkvotienten for $f(x)$?"

Opgave 1.3: Når man skal til at modellere populationen af fx tøffeldyr, og man har fastslået, at der muligvis er tale om logistisk vækst, kan man prøve at få den følgende grundmodel til at passe til ens data:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}$$

Denne ligning kaldes den *logistiske ligning*. I den logistiske ligning er parametrene defineret således:

$N(t)$	Populationen til tiden t
K	Den maksimale populationskapacitet som omgivelserne kan bære
N_0	Begyndelsespopulationen – dvs. $N(0)$
r	Raten for populationens vækst

Ved at kigge på Tabel 1 kan du finde gode bud på K og N_0 – prøv om du kan give et bud på r og se så om grafen for din model passer på dataene.

Hvorfor ser den logistiske ligning sådan ud?

Lad os begynde med at stille spørgsmålet "hvad afgør hvordan en population vokser?". For det første er sammenhængen mellem hvor mange individer (tøffeldyr), der dør per tidsenhed og antallet af ny tøffeldyr der fødes per tidsenhed afgørende. Det er denne sammenhæng, man ofte kalder *populationsraten* r og denne parameter angiver hvor mange flere tøffeldyr der kommer per individ i den eksisterende population per tidsenhed. Hvis man kigger helt forsimplet på det, kan man sige, at *ændringen af populationen til et givet tidspunkt* t er givet ved $rN(t)$. Men i så fald ville populationen jo vokse med en konstant hastighed. Og det virker ikke til at stemme overens med virkeligheden, for en population vokser typisk mindre i starten (da der ikke er så mange individer) og derefter mere og mere indtil den igen begynder at vokse mindre (da omgivelserne måske kun kan bære et maksimalt antal individer – det vi ovenfor har kaldet K). En måde at beskrive væksten på er derfor ved at sige at *ændringen af populationen til et givet tidspunkt t* er givet ved $rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$. Du kan selv prøve at overveje, hvad udtrykket $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ har af effekt (se på hvad der sker både når $N(t)$ er meget lille og når den er næsten lige så stor som K).

Men da $rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ er et udtryk for *ændringen* af populationen, må det betyde, at $rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = \frac{dN(t)}{dt}$. Og det viser sig, at den logistiske ligning er stamfunktion for $\frac{dN(t)}{dt}$ – dvs at den logistiske ligning er et udtryk for $N(t)$.

Idea: Claus Michelsen & Jan Alexis Nielsen,
Syddansk Universitet Odense, Denmark

Opgave 1.4: (a) Beskriv i ord hvad du forstår ved en funktion. Kom ind på hvorfor funktioner ofte anvendes i forbindelse med modellering og beskriv hvilke informationer man får fra graferne af

i. $f(x)$ i et $(f(x), x)$ koordinatsystem

ii. $f'(x)$ i et $(f'(x), x)$ koordinatsystem

iii. $\frac{f'(x)}{f(x)}$ i et $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}, f(x)\right)$ koordinatsystem

(b) Beskriv i ord de forskellige muligheder det åbner at bruge differentialregning og integralregning i matematisk modelleringsarbejde.

Dette projekt er finansieret med støtte fra Europa-Kommissionen.
Denne publikation (meddelelse) forpligter kun forfatteren, og Kommissionen kan ikke drages til ansvar for brug af oplysningerne heri.