

Hintergrund

Allgemeiner didaktischer Hintergrund und Unterrichtsidee

Durch außermathematische Bezüge sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe des überraschenden und realitätsbezogenen Kontexts soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen werden, andererseits die Vielseitigkeit des mathematischen Begriffs erfahren werden. Unterschiedliche Realitätsbezüge führen auf unterschiedliche Modelle und können somit auch zur Kontrastierung von begrifflichen Eigenschaften und von verschiedenen Modellen beitragen.

Grundidee des Unterrichtsvorschlags ist, dass die Schülerinnen und Schüler den Begriff der Parallelität in authentischen Situationen und Zusammenhängen sowie durch Handlung bzw. handlungsorientiert erfahren. Dabei werden Situationen geschaffen, die zum Teil in verblüffender Weise durch Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf den Parallelenbegriff und hier auf seine zentrale Eigenschaft der Abstandsgleichheit führen.

Mathematischer Hintergrund

In der euklidischen Geometrie werden zwei Geraden *parallel* genannt wenn sie in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben. Es gilt das Parallelenaxiom, das besagt, dass es zu einer Geraden g und einem Punkt P stets genau eine Gerade h zu g durch P gibt, die zu g parallel ist.

Definition:

Für zwei parallele Geraden g und h gilt: Der Abstand aller Punkte von g zu h ist konstant.
Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g oder einer Ebene E ist die Länge der Strecke PF , wenn F der Fußpunkt des auf g bzw. E gefällten Lotes von P ist (Abbildung 1).

Eine entsprechende Definition gilt auch für Ebenen.

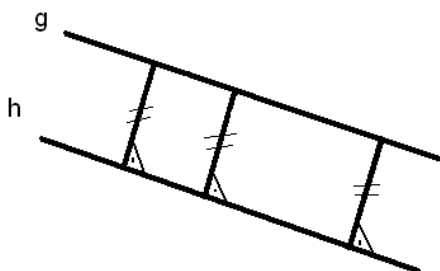


Abb. 1: Nachweis der Parallelität durch Längengleichheit der Lotstrecken verschiedener Punkte von g ; Abstandsgleichheit der Geraden g und h

Ein anwendungswirksames Wissen über den Parallelenbegriff wird allerdings nicht allein durch die Definition erreicht, sondern dadurch, dass Parallelität in einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Objekten gebracht wird. Hierzu gehören die Winkelsätze wie der Wechselwinkelsatz, der Stufenwinkelsatz und die Strahlensätze bzw. deren Umkehrungen.

Ein spannender Zusammenhang ergibt sich zum Thema Kreis. Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M alle denselben Abstand r haben. Damit ist auch die Länge aller Kreissehnen durch M , also der Abstand der zwei Schnittpunkte jeder Durchmessergeraden mit der Kreisperipherie, stets gleich. Es folgt, dass zwei Geraden, die Kreistangenten zu zwei Kreisen mit gleichem Durchmesser sind, parallel sind. Umgekehrt müssen zwei Kreise zwischen zwei Parallelen den gleichen Durchmesser haben. In weiterer Überlegung müssen Objekte zwischen zwei Parallelen die „gleiche Dicke“ haben.

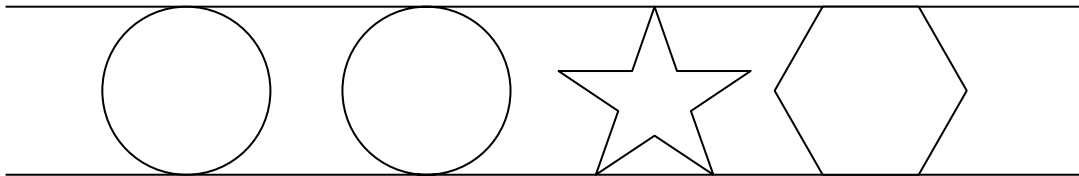


Abb. 2: Objekte „gleicher Dicke“ zwischen zwei Parallelen

Besonders interessant wird der Zusammenhang in dynamischer Betrachtung. Gibt es dann außer dem Kreis noch weitere Objekte, bei denen parallele Geraden unter deren Bewegung parallel bleiben? Wie müssen diese Objekte aussehen, welche Eigenschaften müssen sie haben?

Bei der Antwort spielt die Parallelendefinition über den Abstand eine entscheidende Rolle (vgl. „Gleich-Dicks“ unter 4).

In anwendungsorientierter Betrachtung lässt sich Parallelität praktisch mit Hilfe von Wasserwaagen nachweisen. In der Regel interessiert dabei, ob ein Brett oder eine Wand parallel zur Erdoberfläche oder zu deren Senkrechter, also genau waagrecht oder genau senkrecht ist.



Abb. 3: Wasserwaage. Das Brett liegt waagrecht, da sich die Luftblase im Wasser der Waage zwischen den Markierungen befindet. Die Wasseroberfläche in der Wasserwaage richtet sich stets parallel zur Erdoberfläche aus. Die Parallelität bleibt erhalten, auch wenn die Waage gekippt wird. In diesem Fall ist die Wasseroberfläche allerdings nicht mehr zu der Grundfläche der Waage parallel. Die Luftblase wandert aus dem Markierungsbereich. Wenn die Grundfläche der Wasserwaage parallel zu der zu messenden Oberfläche gehalten wird (also zum Beispiel auf das Brett gelegt wird), lässt sich aus der Lage der Luftblase ablesen, ob die Oberfläche waagrecht ist.