Idee: Marina Rugelj,
St. Stanislav Institutut, Diözesanes Gymnasium, Ljubljana, Slovenia

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Hintergrund

Allgemeiner didaktischer Hintergrund

Im Mathematikunterricht erklärt der Lehrer die Definition des Logarithmus und leitet mit Hilfe dieser Rechenregeln her. Die Schülerinnen und Schüler lernen die Definition und Regeln und wie man damit typische mathematische Probleme lösen kann.[1] Aber nachdem die Klassenarbeit darüber geschrieben ist, vergessen sie fast alles über den Logarithmus. Der Logarithmus hängt mit keinem anderen mathematischen Begriff außer der Exponentialfunktion[2] zusammen. Aber die Exponentialfunktion hängt bei den Schülerinnen und Schülern auch irgendwie in der Luft.

Die Schülerinnen und Schüler können Gleichungen aufstellen und diese auf drei oder vier Routineaufgaben aus dem Schulbuch anwenden. Es gibt kein eindeutiges Indiz, dass die Schülerinnen und Schüler die Theorie dahinter verstehen.[3] Perkins behauptet, dass Wissen und die damit verbundenen Fertigkeiten kein Verständnis darüber garantieren.[4] Routinewissen behindert das Anwenden, denn Schülerinnen und Schüler verstehen nicht, wann dieses Wissen angewendet werden kann.

Wir können das Erlernen des Logarithmus effektiver gestalten, wenn wir den klassischen Weg mit neuen Ansätzen kombinieren, die den Schülerinnen und Schülern Anwendungsmöglichkeiten des Logarithmus im Alltag außerhalb der Mathematik aufzeigen. Sie können Verknüpfungen zu Begriffen, Eigenschaften, Anwendungen, usw. aufbauen, Collins und Loftus[5] sprechen von einem „spreading activation model“. Nach diesem Modell kann man sich gespeichertes Wissen, als Netzwerk mit vielen Verknüpfungen vorstellen. Die Aktivierung eines Elements während eines Denkprozesses führt zur Aktivierung mit diesem Element verknüpften Elemente. Der Aktivierungsprozess tendiert dabei in alle Richtungen auszubreiten, um die verknüpften Informationen zu aktivieren.

Deshalb sollte es unser Ziel sein, ein Netzwerk mit vielen verknüpfenden Begriffen zum Logarithmusbegriff aufzubauen.[6]

Anfangs sind die Schülerinnen und Schüler über solch eine Methode nicht so erfreut, da es für sie schwierig ist in Mathematik gelernte Begriffe, Ideen und Prozeduren auf neue und unerwartete naturwissenschaftliche Situationen zu übertragen.[7] Sie müssen Wissen aus anderen Fächern, wie Physik, Chemie, Biologie oder Psychologie anwenden. Des Weiteren müssen sie selbstständig arbeiten. Sie machen viele Experimente, in denen sie den Logarithmus anwenden müssen. Aber später schafft das selbstständige Arbeiten ein Erfolgsgefühl, verbunden mit motivierenden Anteilen. Außerdem trägt Lernen in Zusammenhängen zu einem intuitiven mathematischen Verständnis bei.[8]

---

[1] Z.B.: Zeichnen von Schaubildern der Logarithmusfunktion, logarithmische Gleichungen lösen, usw.
[2] Der Logarithmus ist als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert.
[3] Teaching for understanding (Perkins, 1993)
[4] Teaching for understanding (Perkins, 1993)
[5] Spreading Activation Model of Semantic Memory (Collins & Loftus, 1975)
[6] Teaching for understanding (Perkins, 1993)
[7] Functions: a modelling tool in mathematics and science (Michelsen, 2006)
[8] Research considerations for interdisciplinary work on mathematics and its connections to the arts and sciences (Beckmann, A. & Michelsen, C. & Sriraman, B., 2005)

Mathematischer Hintergrund

Der Logarithmus wird als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion eingeführt:
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, wobei a eine beliebige positive Zahl sein kann.

Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen x definiert, da a^y, welches gleich x ist ebenfalls immer positiv ist. Genauer gesagt, der Logarithmus einer Zahl x zu einer Basis a, ist der Exponent mit dem a potenziert wird, so dass x als Ergebnis herauskommt.
Falls $x = a^y$ gilt, dann sagen wir im Allgemeinen „y ist der Logarithmus von x zur Basis a."
Wie gesagt, kann jede positive Zahl als Basis gewählt werden, zwei Basen werden allerdings am häufigsten gewählt.

Basis 10:	$\log_{10} x = \log x$	dekadischer Logarithmus
Basis e:	$\log_e x = \ln x$	natürlicher Logarithmus[9]

Aus der Definition ergeben sich folgende Eigenschaften:

$\log_a 1 = 0$,da $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$,da $a^1 = a$

$\log_a a^x = x$,da $a^x = a^x$

Ebenso ergeben sich aus der Definition die Rechengesetze für Logarithmen:

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ [10]

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^m = m \log_a x$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Die Logarithmusfunktion ist definiert als $f(x) = \log_a x$, für alle $x \in R^+$.

---

[9] Die Zahl e wird als Eulersche Zahl bezeichnet, nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler oder als Napiersche Konstante nach dem schottischen Mathematiker John Napier, der als erster Logarithmen eingeführt hatte. Da *e* transzendent und daher irrational ist, kann sein Wert nicht exakt als endliche oder periodische Dezimalzahl dargestellt werden. Der auf 20 Dezimalstellen gerundete Wert von *e* ist: 2.71828 18284 59045 23536... Alternativ ist es durch den Grenzwert $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oder durch die unendliche Reihe $e = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ definiert

[10] Die Multiplikation kann durch eine Addition durchgeführt werden – das ist der größte Vorteil bei Logarithmen; eine ähnliche Idee, wie bei der Formel $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

Die Schaubilder von Logarithmus und Exponentialfunktion symmetrisch[11] zu y=x:

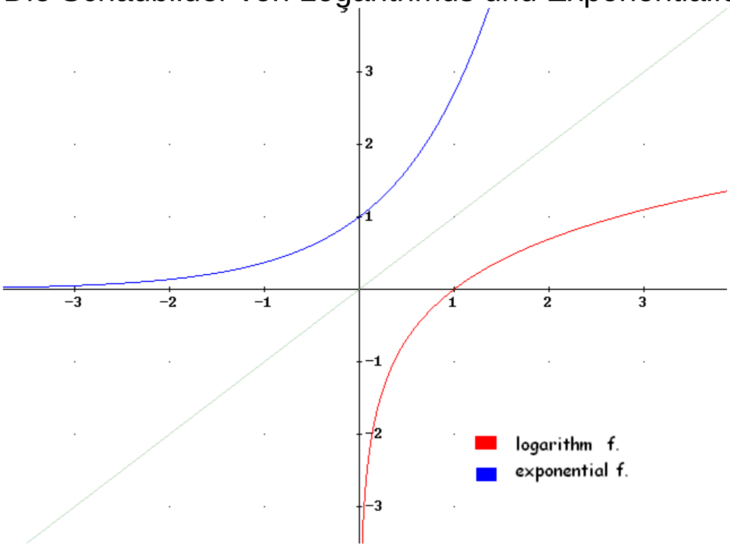

Schaubild 1: Schaubild von Logarithmus und Exponentialfunktion

Warum und wo benutzen wir heute Logarithmen?

a) Um Prozesse in der Natur, besonders in lebenden Systemen, zu modellieren. Wir nehmen die Lautstärke als Logarithmus der wirklichen Lautstärkedichte wahr; dB (Dezibel) sind logarithmisch skaliert. Wir nehmen auch die Lichtstärke als Logarithmus der wirklichen Lichtintensität wahr. Die Größe von Sternen wird auch mit einer logarithmischen Skala gemessen.
b) Um den pH Wert einer chemischen Lösung zu bestimmen.
c) Um die Stärke eines Erdbebens auf der Richterskala zu bestimmen.
d) Um in einem Schaubild sehr kleine und sehr große Werte darzustellen. Wir benutzen eine logarithmische Skalierung, wenn das Werteintervall sehr groß ist.
e) Psychologen zeichnen eine Vergessenskurve[12], welche sehr ähnlich zur Logarithmusfunktion ist. Sie behaupten auch, dass unser Leben nicht linear abläuft und unsere Zeitwahrnehmung logarithmisch ist.[13]
f) Um exponentielle Prozesse zu analysieren.[14] Anwendungsgebiete sind zum Beispiel das Abkühlen einer Leiche, der radioaktive Zerfall eines Isotops und Bakterienwachstum. Die Ausbreitung einer Epidemie in einer Population erfolgt in einer modifizierten logarithmischen Kurve, „logistisch" genannt.
g) Um die Anzahl der Rückzahlungen eines Kredits zu bestimmen
h) Um manche Flächenbestimmungen in Analysis zu durchzuführen.[15]

Ein paar davon werden in den Unterrichtsentwürfen erläutert.

Schlagwörter:
Logarithmus, Logarithmusfunktion, Exponentialfunktion, logarithmische Skalierung

---

[11] Funktion und Umkehrfunktion sind immer symmetrisch zu y=x.
[12] Die Vergessenskurve beschreibt, wie viel Information wir behalten oder vergessen, im Vergleich zu der Information, die wir aufnehmen.
[13] Zum Beispiel: die Jahre von 10 bis 20 scheinen in der gleichen Zeit vorüberzugehen als die Jahre von 20 bis 40, oder jene von 40 bis 80.
[14] Da die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, analysieren wir oft exponentielle Kurven durch den Logarithmus.
[15] Die Fläche zwischen x-Achse und der Funktion 1/x, zwischen x=1 und x=A ist gleich ln A.

Unterrichtsidee

Dieser Ansatz erfordert für den Mathematiklehrer eine gute Vorbereitung, da er sich Themen aus anderen Fächern aneignen und mit anderen Lehrern kooperieren muss. Obwohl eine große Anzahl der Themen mathematische Inhalte enthält, ist es für Mathematiklehrer und Lehrer aus anderen Fächern immer noch schwer, den Einsatz der Mathematik in anderen Fächern zu sehen – zum Teil wegen der Anwendung der Begriffe und der anderen sprachlichen Verwendung.[16] Am besten wäre es, wenn beide Lehrer (z.B. Mathe- und Physiklehrer) gleichzeitig im selben Klassenzimmer gemeinsam unterrichten.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

[16] Functions: a modelling tool in mathematics and science (Michelsen, 2006)