



## **Material de Aprendizaje**

### **Parábola entre Matemática y Física - El caso del lanzamiento horizontal**

#### **Propuesta para un posible curso**

Véase las siguientes páginas

#### **Introducción**

El módulo conta de dos partes.

La parte *DESDE FISICA* es realizado por un profesor de física, La parte de *DESDE MATEMATICA* relizada por un profesor de matemáticas.

## DESDE FISICA ...

### Experimento Introductorio

La cinemática es la rama de los mecánicos clásicos referidos a describir los movimientos de objetos sin la consideración de los factores que causan o afectan al movimiento. Después de dominar el movimiento lineal nos centramos entonces en el lanzamiento horizontal. Este movimiento plano es estudiado detalladamente. El primer experimento de las dos monedas es bastante conocido (Figura 1).

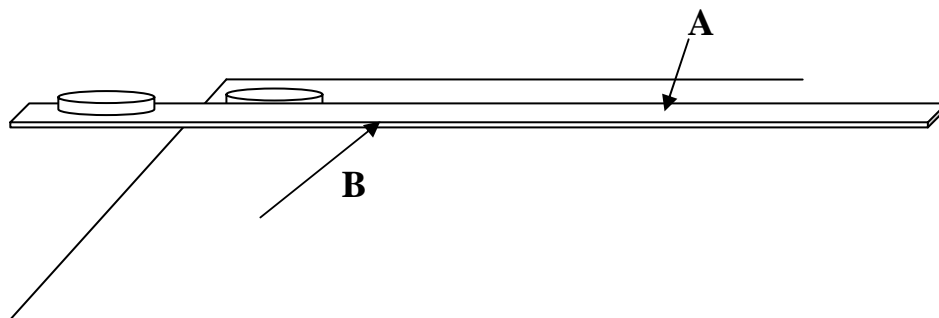


Fig. 1.

Ha de disponerse de un objeto alto (por ejemplo un guardarropa de 2 metros de alto). Un dedo está presionando en el punto A mientras que el otro empujará rápidamente (instantáneamente) la regla en el punto B. Este movimiento repentino de la regla hará que la moneda del lado izquierdo caiga libremente mientras que la de la derecha será lanzada en dirección horizontal.

### Preparación

Antes de empezar con el experimento, Los estudiantes tendrán que discutir y adivinar cual sería el siguiente experimento a realizar. Muchos de ellos creerán que las monedas caeran al suelo en el mismo tiempo.

### Realización del experimento

Después de repetir el experimento, ellos están de acuerdo, que uno solo escucha el sonido de las monedas una sola vez, por ello las monedas caen al piso a la misma velocidad.

### Conclusión

Nosotros concluimos: el movimiento de un objeto horizontalmente lanzado puede estar repartido en dos movimientos independientes: uno es un movimiento vertical que es igual a un movimiento del cuerpo libremente el caer (las dos monedas comenzaron su trayectoria en el mismo nivel y el tiempo y ellas golpearon simultáneamente el piso). Pero este experimento simple no puede decirnos qué está sucediendo con respecto a la parte horizontal del movimiento de la moneda

El movimiento vertical puede ser calculado por la misma ecuación que utilizamos anteriormente para la caída libre de un objeto. Que es:

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad (1) \quad \text{and} \quad v_y = gt \quad (2)$$

## Proyecto de **Ciencias-Matemáticas: Lanzamiento Horizontal y Parábola**

Idea: Tine Golež,

St. Stanislav Instituto de educación,

Diocesan Classical Gymnasium Ljubljana, Eslovenia

Nota, que el eje  $y$  es contrario al al uso matemático orientado hacia abajo mientras que el eje  $x$  tiene la dirección usual horizontal.

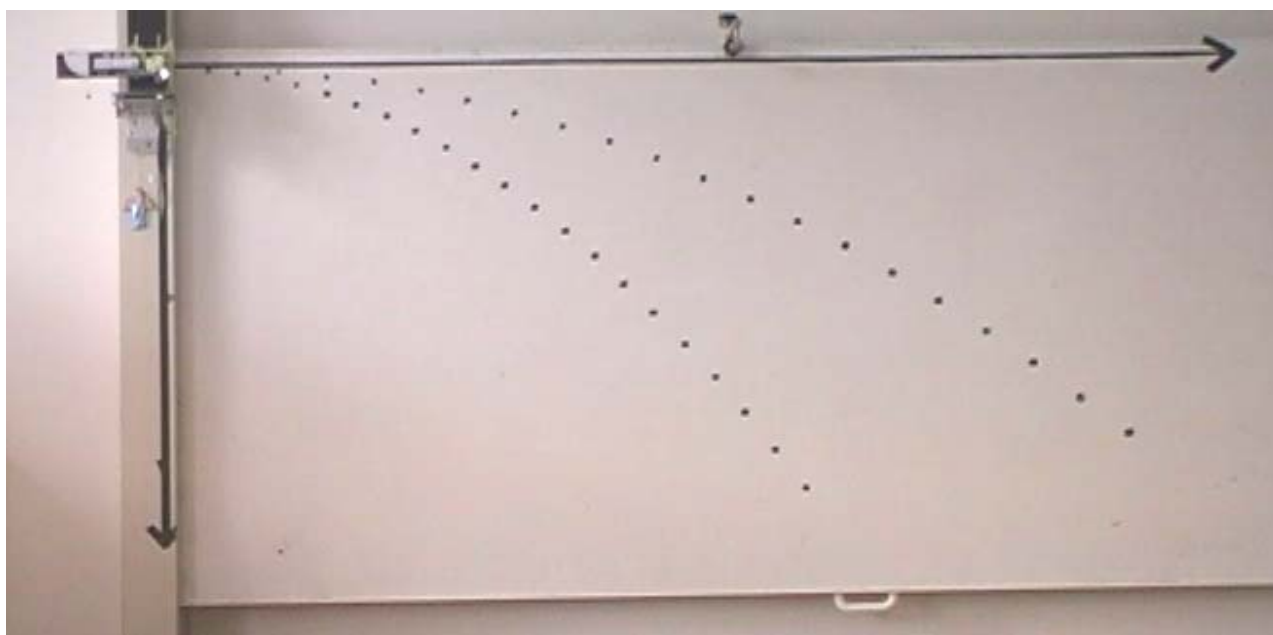
### **Mejorando el Experimento**

Un experimento de física y de las medidas acompañadas deben lo más simples como sea posible. Pero cuando estas no nos dan suficientes datos para explicar el fenómeno, uno debe realizar o reajustar el experimento. Ésa es la razón para continuar este experimento usando un arma de resorte (lanzador del proyectil producido por PASCO) fijado en el borde del tablero (Figura 2). Nos permite tirar en varias ocasiones una bola plástica. Un experimento tan realizado nos permite medir las cantidades que nos llevan a dar las conclusiones sobre la parte horizontal de este movimiento. Primero, los estudiantes no se enterarían, cómo el uso de esta arma podría ayudarnos a analizar el caso de un objeto lanzado horizontalmente. Ellos dicen: “La velocidad de la bola es muy alta. Cómo podemos medir este movimiento?”



*Figura. 2*

*Un arma de resorte se fija al lado del tablero. Su posición en la sala de clase es más visible en la figura 3.*



*Figura. 3.*

*Esta es la fotografía del tablero en la sala de clase durante la clase de física. Los puntos han sido dibujados mientras proyectamos el tiro horizontal en modo de cámara lenta*

La forma más fácil es grabar el experimento con una cámara digital. Luego podremos analizar en cámara lenta el movimiento de la bola. No es difícil poner el proyector en una distancia del tablero de tal forma tendremos una proyección de escala 1 a 1 "1:1". La película se proyecta en cámara lenta, tan lenta, que la posición de la bola en el tiempo puede ser marcada con puntos. El disparador nos deja disparar en tres velocidades diferentes. Dos de ellos son grabados y posteriormente proyectados. Las marcas de la trayectoria se muestran en la Figura 3.

Algunos estudiantes notan que las distancias entre los puntos marcados en dirección horizontal son iguales cuando consideramos un disparo (con una velocidad particular). Pero la mayoría de los estudiantes notarán esto cuando lo representemos en el tablero (Figura 4).

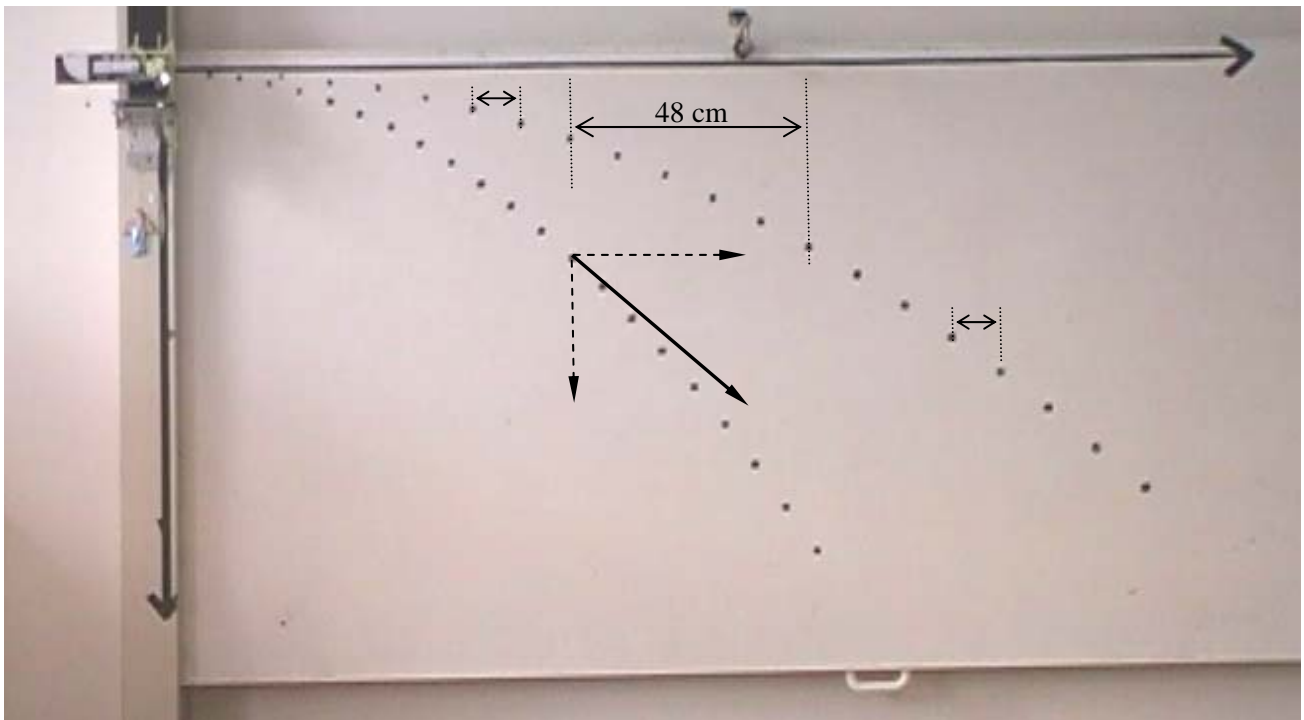


Figura. 4.

Puesto que los puntos se han proyectado en el tamaño real uno pueden medir simplemente las distancias en el tablero y calcular la velocidad inicial. Es obvio que las distancias horizontales son iguales durante cada intervalo.

Es obvio (Figura.4) que el componente horizontal de la velocidad es constante. Podemos escribir las dos ecuaciones para el movimiento horizontal:

$$v_x = v_0 \quad (3)$$

$$x = v_0 t \quad (4)$$

El profesor de la física mide simplemente las distancias en el tablero y calcula la velocidad inicial. Además él explica la velocidad instantánea como una cantidad vectorial y sus componentes. Él también realiza "un experimento del cazador y del mono" pero éste no es esencial para el profesor de matemáticas, así que esto no se describe aquí.

## ...PARA MATEMATICAS

### “Profesores de Matemáticas/ estudiantes como investigadores”

El profesor de matemáticas motiva su a estudiantes trayendo las fotocopias de las esenas de la (figura. 3) que reconocerán de las lecciones física (o él continúa directamente (en) la lección de física). ¡Se encuentran ya en sus cuadernos de física! El invita a los estudiantes que investiguen el cuadro matemáticamente. Esta investigación los llevará a calcular algunos hechos importantes sobre tirar sin mirar los datos que son recogidos en el cuaderno de la física. Primero ellos recuerdan las ecuaciones que conocen de los profesores de matemáticas. Por lo tanto:

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

y

$$x = v_0 t \quad (6)$$

El profesor de matemáticas puede proceder reconociendo que él no sabe la velocidad inicial de la bola y tampoco los intervalos de tiempo entre dos posiciones marcadas de la bola. Pero él lo dice que podría descubrir los datos que faltan analizando el dibujo.

**Pregunta:** Cómo podemos trazar un gráfico  $y(x)$  (expresado por las expresiones paramétricas (5) y (6)) que encaje con los puntos del tablero.

Combinando ambas ecuaciones ( $t$  es expresado de la ecuación (6) y usado en la ecuación (5)) uno deriva la ecuación de la parábola:

$$y = \frac{g \left( \frac{x}{v_0} \right)^2}{2} \quad (7)$$

Para tener una forma más común de la que él escribe:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (8)$$

Ahora la ecuación se asemeja a la ecuación bien conocida comola ecuación de la parábola de la posición central  $y = ax^2$ . Cuando el coeficiente  $a$  es por ejemplo 5, la parábola es muy escarpada y viceversa, cuando  $a$  es pequeño (por ejemplo 0.2) la curva se incrementa suavemente. Debemos considerar que ahora el eje  $y$  está orientado hacia abajo. El positivo  $a$  nos da en el dibujo una igualdad negativa a usando un sistema coordinado orientado ascendente al eje  $y$ .

**Pregunta:** ¿Encaja en el mundo real esta observación matemática? En el caso de alta velocidad la cuesta es menor. Los puntos superiores (Figura. 3, 4 y 5) corresponden a la velocidad más alta. El coeficiente en la ecuación 8 es menor en caso de una mayor velocidad.

### Al análisis cuantitativo

Este es solamente el análisis cualitativo. Ahora el profesor de matemáticas va a elegir un punto y mide sus coordenadas (estableciendo el sistema de coordenadas y las unidades apropiadas). Estas son 12.0 cm y 4.3 cm (Figura 5). ¿Pero cuál es la escala de este dibujo? El profesor de matemáticas admite que él entró en la salón de clase de física con la ayuda de la señora encargada de la limpieza el día anterior (la salón de clase de física está siempre con llave!). No había nada en el tablero así que él midió la altura de éste. El calculó el cociente entre los objetos reales y el dibujo: este es 1: 14. Las coordenadas del punto cercado son calculados multiplicando los valores medidos por 14. Por lo tanto son: 1.68 m y 0.60 M.

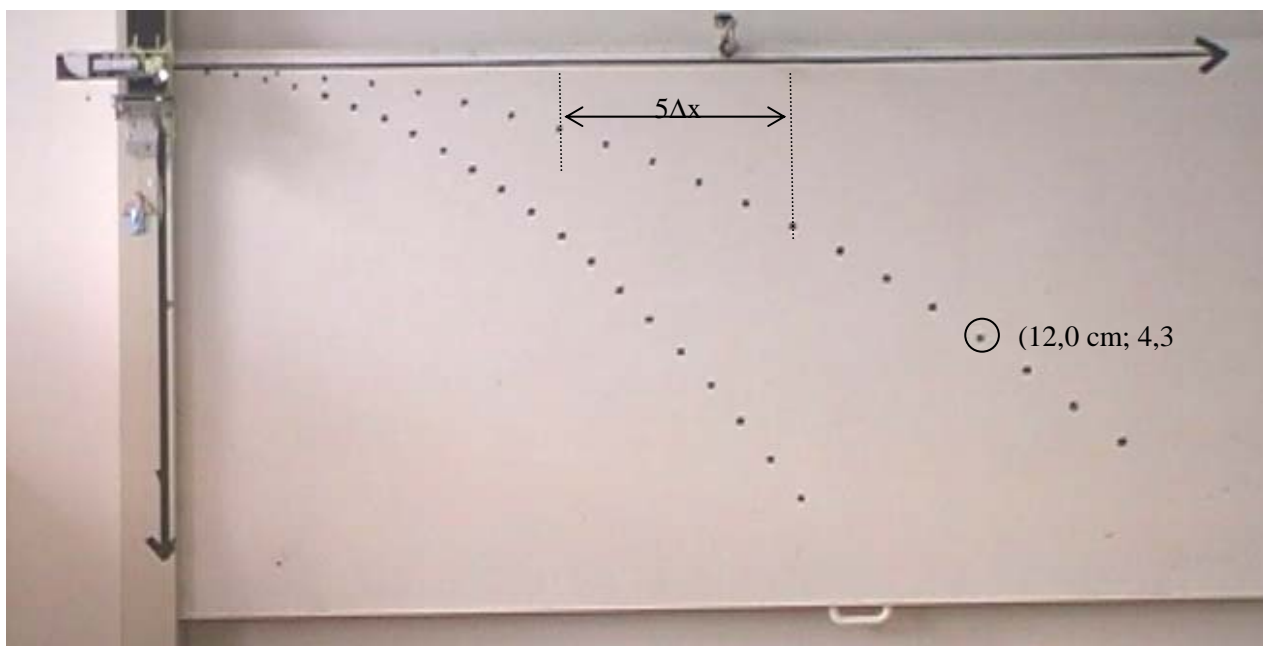


Figura. 5

*El profesor de matemáticas cercó un punto y midió sus coordenadas. El también midió el desplazamiento en la dirección horizontal entre cinco puntos consecutivos.*

Utilizando la ecuación (8) podemos calcular simplemente la velocidad inicial. Esta es de 4,8 m/s. Los estudiantes miran en el cuaderno de física y encuentran el mismo resultado.

Pero el profesor de matemáticas puede encontrar también el intervalo del tiempo entre dos puntos. Tomando como punto la velocidad inicial y midiendo el intervalo  $5\Delta x$ , él calcula el intervalo: 0,0198 s. El valor inverso corresponde a la frecuencia con la que las fotos fueron tomadas. La frecuencia es de casi  $50 \text{ s}^{-1}$  que corresponde al radio de frecuencia de una cámara de video normal. entonces, el intervalo del tiempo es aproximadamente 0,020 s.