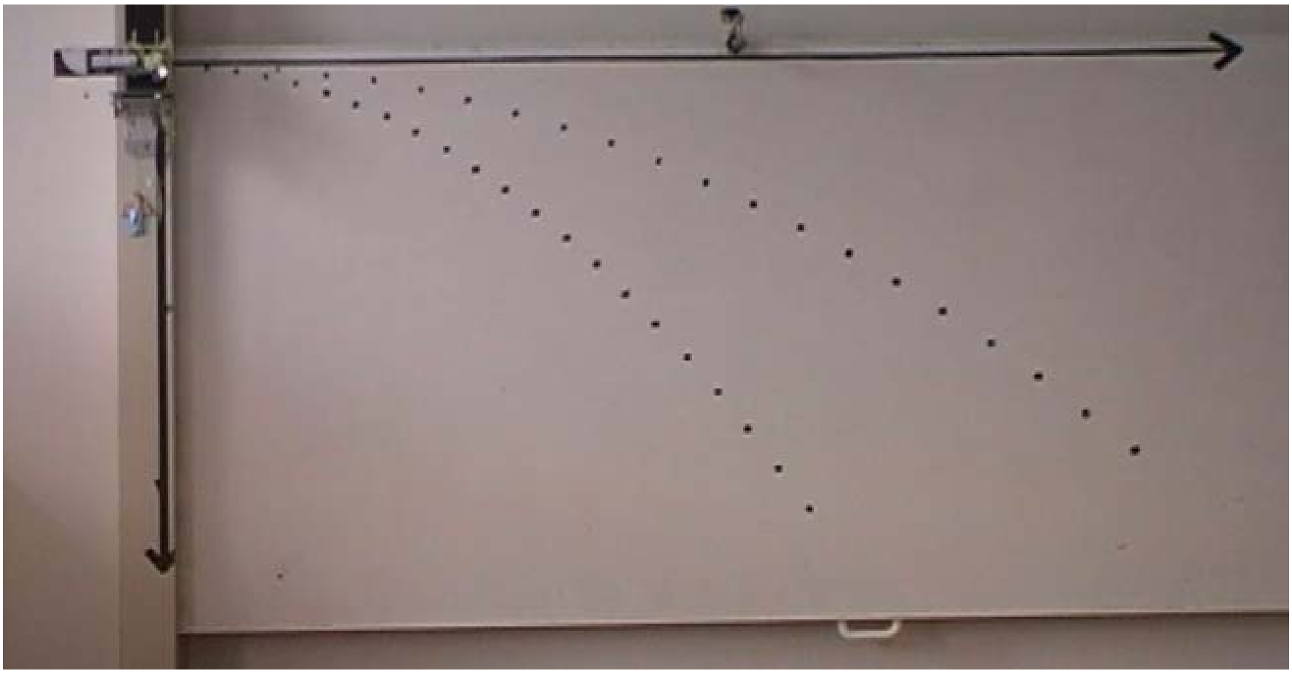
The **ScienceMath-**project: **Horizontaler Wurf und Parabelfunktion**
Idee: Tine Golež,
St. Stanislav Institut, Diözesanes Gymnasium, Ljubljana, Slovenien

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Parabelfunktion in Mathematik und Physik im Fall des waagrechten Wurfs

Unterrichtsvorschlag, benötigtes Material und Arbeitsblätter



Von der Physik aus betrachtet…..

Einführendes Experiment

Die Kinematik ist ein Teil der klassischen Mechanik, die Bewegungen von Objekten beschreibt ohne dessen Ursachen zu betrachten. Nach Behandeln von geradlinig gleichmäßigen Bewegungen, folgt die Betrachtung des horizontalen Wurfs. Das erste Experiment ist das bekannte Zwei Münzen Experiment (Abb. 1)

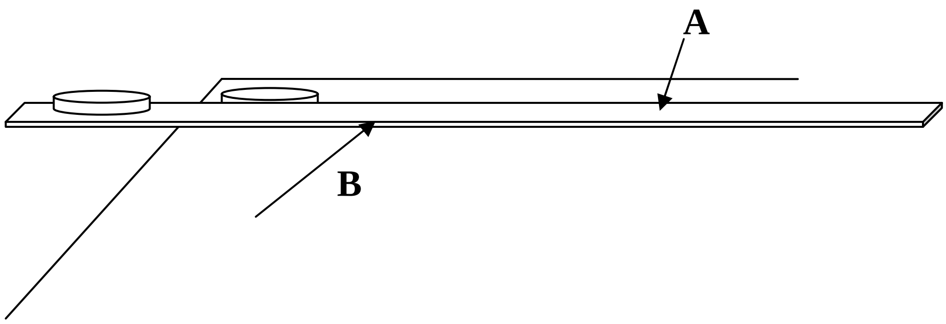


Abb. 1: Zwei Münzen Experiment

Die Materialien werden auf ein hohes Objekt gelegt (z.B. auf einen Hochschrank). Ein Finger drückt auf das Lineal am Punkt A, während der andere Finger das Lineal am Punkt B schnell über die Kante schiebt. Die linke Münze fällt als frei fallendes Objekt nach unten. Die rechte Münze fliegt in waagrechter Richtung weg.

Gedanken vor dem Versuch

Bevor das Experiment ausgeführt wird, sollen die Schüler mögliche Ergebnisse schätzen und diskutieren. Wahrscheinlich werden nur sehr wenige erraten, dass die beiden Münzen gleichzeitig auf dem Boden ankommen werden.

Durchführen des Experiments

Nach mehreren Wiederholungen des Experiments, werden sie übereinstimmen, dass nur ein Klang zu hören ist, die beiden Münzen also in vertikaler Richtung mit gleicher Geschwindigkeit fallen.

Folgerung

Die Bewegung eines waagrecht geworfenen Objekts kann in zwei voneinander unabhängige Bewegungen aufgeteilt werden: eine Bewegung ist vertikal und entspricht der Bewegung des freien Falls (da die beiden Münzen gleichzeitig starteten und gleichzeitig ankamen). Aber dieses einfache Experiment gibt noch keine Auskunft über die waagrechte Bewegung der Münze.

Die vertikale Bewegung kann durch die Bewegungsgleichungen des freien Falls bestimmt werden:

$y = \frac{gt^2}{2}$ (1) and $v_y = gt$ (2),

wobei die positive y-Richtung im Gegensatz zum Mathematikunterricht nach unten zeigt, die x-Achse, wie gewöhnlich in waagrechter Richtung.

Weiterführendes Experiment

Ein physikalisches Experiment und die dazugehörigen Messungen sollten so einfach wie möglich sein. Wenn es nicht genug Informationen zur Beschreibung des Phänomens liefert, muss es erweitert oder neu konzipiert werden. Deshalb wird dieses Phänomen durch ein anderes Experiment mit Hilfe eines federbetriebenen Projektils untersucht, das an die Tafel befestigt werden kann (siehe Abb.2). Damit kann ein Plastikball wiederholt abgeschossen werden. Dieses verbesserte Experiment erlaubt Messungen, mit denen Folgerungen über die horizontale Bewegung geschlossen werden können. Am Anfang werden die Schüler nicht erkennen, wie dadurch der waagrechte Wurf analysiert werden kann. Sie sagen: „Die Geschwindigkeit des Balls ist sehr hoch. Wie können wir diese Bewegung messen?“

Abb. 2: ein federbetriebenes Projektil, das an die Tafel befestigt ist.

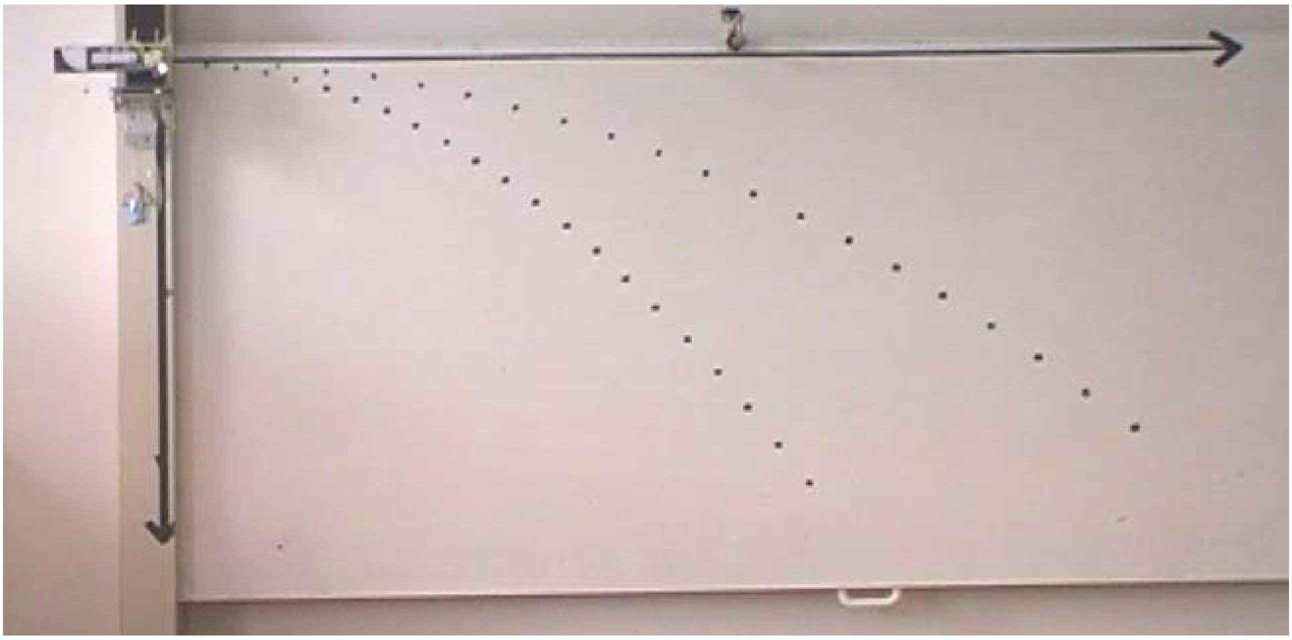


Abb.3: Versuchsaufbau im Physikunterricht. Die Punkte wurden von Hand eingezeichnet, als der waagrechte Wurf in Zeitlupe auf die Tafel projiziert worden ist.

Das Experiment kann am einfachsten durch eine Digitalkamera aufgenommen werden. Später kann der Weg des Balls mit Hilfe der Zeitlupenfunktion analysiert werden. Es ist nicht schwierig die Distanz des Beamers zur Tafel zu bestimmen, so dass der Wurf im Verhältnis 1:1 dargestellt werden kann. Der Film kann im Zeitlupenmodus so langsam abgespielt werden, so dass der Lehrer die Positionen des Balls in gleichen Zeitabschnitten markieren kann. In Abhängigkeit vom Projektil kann der Versuch mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten ausgeführt werden. Zwei verschiedene Fälle sind in Abb. 3 zu sehen.

Einige Schüler werden feststellen, dass die Intervalle zwischen den Punkten in horizontaler Richtung gleich sind, wenn nur ein Schuss betrachtet wird. Die Mehrheit der Schüler erkennt dies erst, wenn es an der Tafel veranschaulicht wird (Abb. 4)

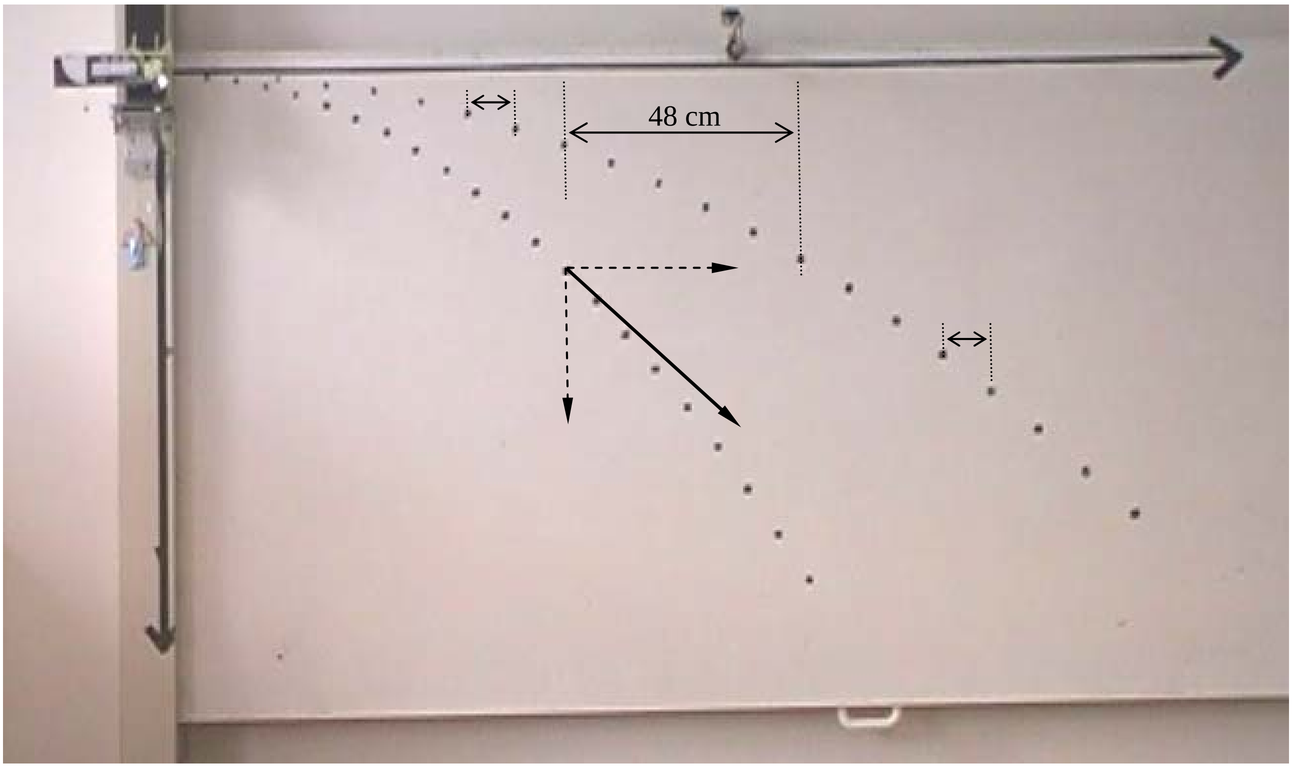


Abb.4: waagrechter Wurf mit Intervallmessungen und Richtungsvektoren

Da die Punkte die Bewegung des Balls 1:1 darstellen, können die Abstände an der Tafel gemessen und die Anfangsgeschwindigkeit berechnet werden. Man sieht, dass die horizontalen Abstände pro Zeitintervall gleich lang sind.

Abbildung 4 zeigt offensichtlich, dass die waagrechte Komponente der Geschwindigkeit konstant ist. Die waagrechte Bewegung kann durch zwei Gleichungen beschrieben werden.

$$v_x = v_0 \quad (3)$$

$$x = v_0 t \quad (4)$$

Der Physiklehrer misst die horizontalen Abstände an der Tafel und berechnet die Anfangsgeschwindigkeit. Darüber hinaus erklärt er die Momentangeschwindkeit als Vektorgröße mit ihren dazugehörigen Komponenten. Zur weiteren Erläuterung kann das „Fang den Affen“ Experiment noch ausgeführt werden, auf das hier nicht näher eingegangen wird, da es für den Mathematiklehrer nicht so wichtig ist.

…. von der Mathematik aus betrachtet…..

„Mathematiklehrer und Schüler als Forscher”

Es wird vorgeschlagen, dass der Mathematiklehrer die Schüler durch Fotokopien von Abb. 3 motiviert, die sie vom Physikunterricht her wiedererkennen, da es schon im Physikheft enthalten ist. Er lädt die Schüler ein, das Bild mathematisch zu untersuchen. Diese Untersuchung führt die Schüler dazu, wichtige Aspekte des Schusses zu bestimmen ohne dass auf die Messdaten aus dem Physikheft zurückgegriffen wird. Als erstes wiederholen die Schüler folgende zwei Gleichungen, die auch dem Mathematiklehrer sicherlich bekannt sein dürften.

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

und

$$x = v_0 t \quad (6)$$

Der Mathematiklehrer kann fortfahren, in dem er festhält, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Balls und die Zeitintervalle zwischen zwei Markierungen unbekannt sind. Aber er behauptet, dass er die fehlenden Daten durch genauere Betrachtung der Abbildung herausfinden kann.

Frage: Wie erhält man einen y(x) Graphen, der durch die Parameter aus Gleichungen (5) und (6) ausgedrückt wird und zu den Punkten an der Tafel passt?

Durch Verknüpfen beide Gleichungen (Löse (6) nach t auf und setze in (5) ein), erhält man die Parabelgleichung

$$y = \frac{g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2}{2} \quad (7)$$

Um eine üblichere Schreibweise zu bekommen, schreibt er:

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (8)$$

Jetzt spiegelt diese Gleichung die bekannte Parabelgleichung $y=ax^2$ wieder. Wenn der Koeffizient a zum Beispiel 5 ist, ist die Parabel sehr steil und umgekehrt ist sie für kleine Werte von a (z.B. 0,2) flach. Es ist zu beachten, dass die positive y-Achse nach unten zeigt. Positive Werte von a ergeben ein Bild, wie in Abbildung 3, negative Werte von a führen zu einem Bild, das nach oben führt.

Frage: Passen diese mathematischen Beschreibungen zu den physikalischen?

Ist die Geschwindigkeit hoch, dann ist die Steigung nicht so steil. Die oberen Punkte in Abb. 3, 4 und 5 deuten auf eine höhere Geschwindigkeit. Der Koeffizient in Gleichung (8) ist bei hoher Geschwindigkeit kleiner.

…… zur quantitativen Analyse

Dies war lediglich eine qualitative Analyse. Nun wählt der Mathematiklehrer einen Punkt aus und misst dessen Koordinaten (wobei das Koordinatensystem entsprechend ausgewählt werden sollte). In Abb. 5 beträgt dieser 12,0 cm und 4,3 cm. Aber welchen Maßstab hat das Bild? Der Mathematiklehrer gibt zu, dass er nur mit Hilfe der Putzfrau in den Physikraum kam (Der Physikraum ist immer abgeschlossen!), die Tafel gewischt war und er deshalb nur die Maße der Tafel ausgemessen hat. Der Maßstab zwischen der Kopie und dem Experiment sei 1:14. Die Koordinaten des eingekreisten Punktes müssen als mit dem Faktor 14 multipliziert werden. Also betragen diese 1,68 m und 0,6 m.

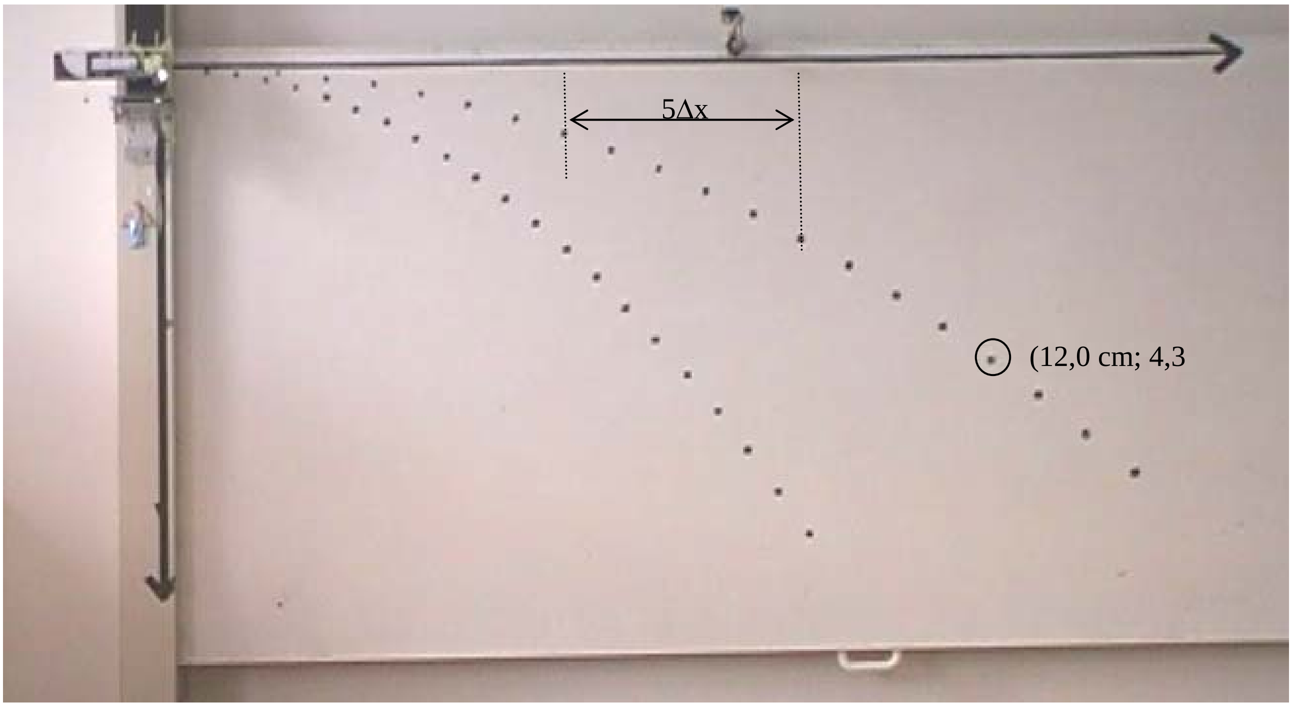


Abb. 5: Der Mathelehrer kreist einen Punkt ein, misst die Koordinaten und misst ebenso den horizontalen Abstand zwischen 5 nacheinander liegenden Punkten.

Mit Hilfe von Gleichung (8) kann die Anfangsgeschwindigkeit einfach berechnet werden. Sie beträgt 4,8 m/s. Die Schüler vergleichen den Wert mit ihrem Wert im Physikheft und finden dasselbe Ergebnis.

Aber der Mathematiklehrer kann ebenso das Zeitintervall zwischen zwei Punkten herausfinden. Mit der bereits berechneten Anfangsgeschwindigkeit und gemessenen Intervall 5Δx, berechnet er das Zeitintervall: 0,0198s. Der Kehrwert ist die Frequenz, mit der das Bild aufgenommen wurde. Die Frequenz ist ungefähr 50 s^{-1} und entspricht der Standardfrequenz einer gewöhnlichen Kamera. Also ist das Zeitintervall ca. 0,020s.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.