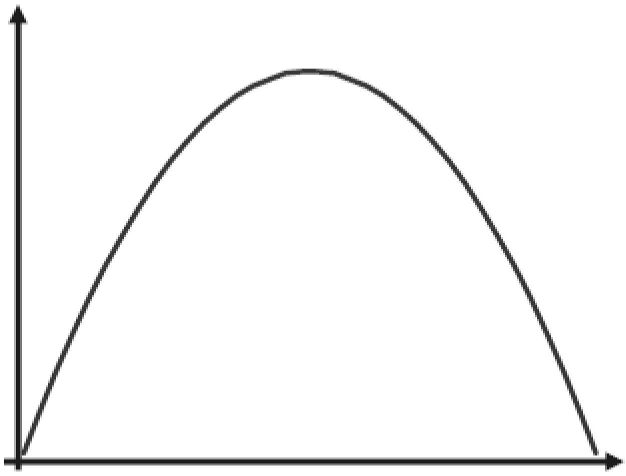
Idée : Claus Michelsen & Jan Alexis Nielsen,
Syddansk Universitet Odense, Danemark

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

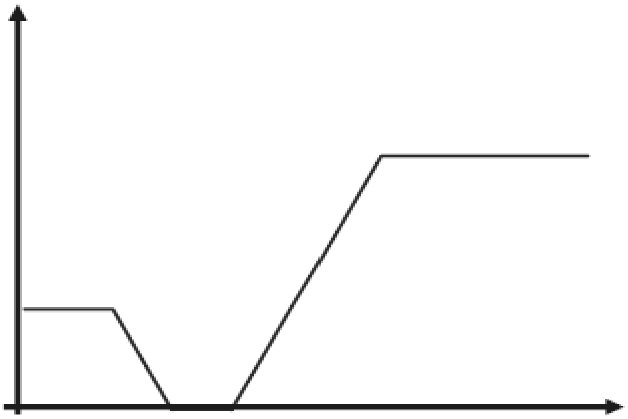
1. Graphiques

Pour décrire les situations de la vie quotidienne, on utilise souvent des graphiques. Dans cette partie, nous regardons quelques exemples.

1.1 : essaies de trouver une situation du quotidien qui passe au graphique en bas. Décris avec tes propres mots ce qui se passe dans cette situation. N'oublie pas de mettre une inscription sur les axes.



1.2 : Quelle situation du quotidien pourrait décrire ce graphique ? Décris avec tes propres mots ce qui se passe dans cette situation. N'oublie pas de mettre une inscription sur les axes.



1.3: Dans les cas suivants, tu dois esquisser pour chaque situation correspondante un graphique. Avant de réaliser le graphique, tu décides, quelles dimensions pourraient avoir tes axes.

(a) Tu ouvres un robinet avec de l'eau chaude. La température de l'eau courante dépend du temps depuis lequel le robinet a été ouvert.

(b) Tu fais tomber une balle en plastique d'une fenêtre du deuxième étage. La distance séparant la balle de la rue, dépend du temps auquel tu as lâché la balle.

(a)

(b)

(c) À l’extérieur, le soleil est rayonnant. Tu viens d'entrer dans un local sombre. Le diamètre de tes pupilles dépend du temps que tu passe dans ce local sombre.

(d) Tu verses une grande somme d'argent dans un compte d'épargne avec un taux d'intérêt fixe. Le montant dépend du temps passé dans le compte.

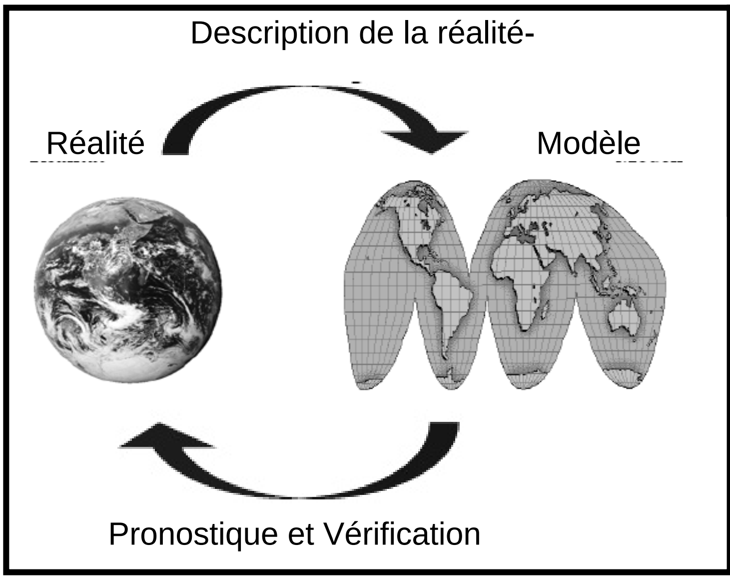
(b)

(d)

Idée : Claus Michelsen & Jan Alexis Nielsen,
Syddansk Universitet Odense, Danemark

2 Modèle mathématique

Une raison importante pour apprendre les mathématiques, c´est qu'avec on peut résoudre des problèmes de la vie réelle. Les problèmes auxquels les mathématiques est applicable sont souvent très complexes. Ainsi, il parait nécessaire de simplifier et d'idéaliser la situation. C'est pour cela que les descriptions mathématiques des problèmes de la vie réelle sont nommées les modèles mathématiques de la réalité.



Á côté des modèles mathématiques, il y a aussi d'autres modèles. Une carte du monde représente aussi un modèle de la

Normalement, l'élaboration et l'application d'un modèle mathématique est un processus dans lequel chaque démarche doit être répétés. Le premier modèle reflète des pronostiques évidents du problème. Ces pronostiques peuvent être vérifiés par les valeurs disponibles. Cette vérification peut mener à nouveau à des améliorations du modèle ainsi qu'à de nouvelles pronostiques, qui peuvent être vérifiés de nouveau. Le fait de répéter ce processus mène à des pronostiques très exactes des situations de la vie réelle.

L'élaboration d'un modèle mathématique contient souvent l'une des descriptions suivantes.

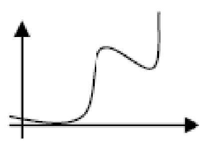
1. On peut avoir une présentation numérique de la situation. Ici on présenterait normalement les données dans un tableau qui décrit le cours d'un certain processus.
2. On peut avoir une présentation symbolique de la situation. Ici on utiliserait normalement des symboles et des termes mathématiques pour décrire le cours du processus.
3. On peut avoir une présentation graphique de la situation. Ici on décrirait la situation par un graphique dans un système de coordonnées.

Height	160	171	172
Weight	66	68	75

Présentation numérique

$$P = \alpha \cdot t + \beta$$

Présentation symbolique



Présentation graphique

Modèles verbaux

Avant de réaliser un modèle mathématique d'une situation, il vaut mieux de décrire la situation avec des mots. Avec cela, on parviendra facilement à réaliser un modèle mathématique. À cet effet, certains modèles mathématiques commencent par une règle générale - une description verbale simple d'une situation de la vie réelle. Un bon exemple d'une règle générale - ou d'un modèle verbal – est

> "Ta taille à l'âge de deux ans est la moitié de ta taille éventuel quand tu seras adulte"
>
> On fond sur la réalisation d'un tel modèle verbal pour réaliser un modèle mathématique.

2.1: Donne des exemples des modèles mathématiques. D'où connais-tu ces modèles et quel profit ont-ils ?
Utilise les modèles verbaux et les méthodes numériques, graphiques et symboliques pour illustrer ces modèles.

Voila une règle générale :

"Plus qu'on plonge plus profond, plus qu'on est soumis à la pression de l'extérieur. La pression augmente autour de 1 atm tous les 10 mètres de profondeur."

2.2 : Admettant que la pression au niveau de la mer est de 1 atm. Donne une description mathématique de cette règle générale décrite ci-dessus.

Les modèles linéaires sont des modèles mathématiques, dans lesquels la relation entre deux variables peut être décrite par une droite dans un système de coordonnées.

2.3 : Quelles méthodes peuvent être appliquées pour déterminer qu'un modèle linéaire peut décrire la relation entre deux variables ?

2.4 : Donnes des exemples des modèles linéaires. D'où connais-tu ces modèles et pourquoi sont-ils utiles ?

Le tableau ci-dessous provient du livre anglais de mathématiques -la modélisation mathématique- de J. Berry et K. Houston

Example 2 World Record for the Mile

Table 1.2 shows the world record for the mile in minutes and seconds between 1913 and 1986

Time	Name	Country	Date	Place
4:14.4	John Paul Jones	USA	31.5.1913	Cambridge, Mass.
4:12.6	Norman Taber	USA	16.7.1915	Cambridge, Mass.
4:10.4	Paavo Nurmi	FIN	23.8.1923	Stockholm
4:09.2	Jules Ladoumegue	FRA	4.10.1931	Paris
4:07.6	Jack Lovelock	NZL	15.7.1933	Princeton, N.J.
4:0.6.8	Glen Cunningham	USA	16.6.1934	Princeton, N.J.
4:0.6.4	Sydney Wooderson	GBR	28.8.1937	Motspur Park
4:06.2	Gunder Hagg	SWE	1.7.1942	Gothenburg
4:06.2	Arne Andersson	SWE	10.7.1942	Stockholm
4:04.6	Gunder Hagg	SWE	4.9.1942	Stockholm
4:02.6	Arne Andersson	SWE	1.7.1943	Gothenburg
4:01.6	Arne Andersson	SWE	18.7.1944	Malmo
4:01.4	Gunder Hagg	SWE	17.7.1945	Malmo
3:59.4	Roger Bannister	GBR	6.5.1954	Oxford
3.58.0	John Landy	AUS	21.6.1954	Turku, Finland
3:57.2	Derek Ibbotson	GBR	19.7.1957	London
3:54.5	Herb Elliott	AUS	6.8.1958	Dublin
3:54.4	Peter Snell	NZL	27.1.1962	Wanganui
3:54.1	Peter Snell	NZL	17.11.1964	Auckland
3:53.6	Michel Jazy	FRA	9.6.1965	Rennes
3:51.3	Jim Ryun	USA	17.7.1966	Berkeley, Calif.
3:51.1	Jim Ryun	USA	23.6.1967	Bakersfield, Calif.
3:51.0	Filbert Bayi	TAN	17.5.1975	Kingston, Jamaica
3:49.4	John Walker	NZL	12.8.1975	Gothenburg
3:49.0	Seb Coe	GBR	17.7.1979	Oslo
3:46.31	Steve Cram	GBR	27.7.1985	Oslo
3:44.39	Noureddine Morceli	ALG	5.9.1993	Rieti

Table 1.2 The world record for the mile

2.5 : Quels sont les informations données par le tableau ci-dessus ? Est-ce que c'est possible de réaliser un modèle linéaire avec date et record mondial en tant que variables? Si oui, réalise-le.

2.6 : Donne une estimation bien argumentée pour les records mondiaux en 2010, en 2020 et en 2030.

3 Martha et Marius

Martha et Marius vont à la même école. Martha est une bouquineuse. À côté de son bureau se trouvent 5 livres de la bibliothèque. Chaque semaine, elle rend 4 de ces livres à la bibliothèque et emprunte parallèlement 4 nouveaux livres.

3.1 : Dessine un graphique présentant le nombre des livres sur une période de 10 semaines et discerne à travers ce graphique, à quelle hauteur sera la pile de livres de Martha après 8 semaines.

Martha et Marius veulent regarder le championnat d'Europe de handball à la télévision. Ils discutent s'ils doivent acheter ou bien prêter une télé. Pour bien illustrer le problème, ils décident de réaliser un modèle mathématique.

3.2 : À ton opinion, quels éléments doit contenir un tel modèle ? Essaie de réaliser un modèle aidant Martha et Marius à décider s'ils doivent acheter ou bien prêter une télé.

Pendant que Martha fait scrupuleusement ses devoirs, Marius est plutôt paresseux. En moyenne, ils reçoivent 2 nouveaux devoirs par semaine. Marius dépose toutes les deux semaines 2 devoirs en moyenne. L'année scolaire conte plus que 40 semaines, et à la fin, tous les devoirs doivent être déposés.

3.3 : réalise un modèle décrivant la remise des devoirs par Marius. Avec quel nombre de devoirs est-il en retard après 10 semaines ? Après 20 semaines ? Après 40 semaines ?

Dans les vacances d'hiver, Martha et Marius travaillent dans un hôtel de sport d'hiver en Suède. Le directeur de l'hôtel Mats a remarqué que Martha et Marius s'y connaissent bien en modèles mathématiques. Il leur demande, s'ils peuvent projeter un modèle qui décrit et compte clairement, combien de clients passent la nuit dans cet hôtel à un certain temps en pleine saison au cours de 14 jours. Mats dit qu'au début des 14 jours, l'hôtel a été complet avec 220 lits. Dans les premiers 4 jours, 40 clients quittent l'hôtel par jour et 10 clients s´y installent. À partir du cinquième jour, 20 clients quittent l'hôtel par jour. Au cinquième et au sixième jour, 30 nouveaux clients arrivent et à partir du septième jour 50 nouveaux clients arrivent par jour.

3.4 : Donne à Martha et Marius un exemple leurs aidant à réaliser un modèle mathématique en décrivant le nombre des invités passant la nuit dans une période de 14 jours

Si des situations comme celle-ci doivent être analysées sur un modèle mathématique, il y a plusieurs possibilités de réaliser un tel modèle. Un modèle peut être réalisé comme
- description verbale
- comme équation
- comme diagramme
- comme tableau

3.5: Discute les avantages et les inconvénients de chacune des formes de représentation déjà évoquées plus haut et donnes des exemples d'application pour ces formes de représentation différentes.

4 Croissance de la population

Pour distribuer le budget du militaire, des rues, des écoles, du système de santé, etc. il est important pour les services publics et les décideurs politiques de savoir le nombre de la population du pays.

L'intérêt au développement de la population commençait pendant le 18 ème siècle. À cette époque, une attention particulière a été donnée pour le rapport de la population à la consommation des produits alimentaires. En 1798 l'économiste anglais Thomas R. Malthus (1766-1834) a publié le livre „Essay on the principle on Population" dans lequel il a promulgué un modèle mathématique pour la croissance de la population. Le modèle Malthus peut être donné dans la représentation symbolique par la formule

$$\boxed{P_t = P_o \cdot (1 + r)^t}$$

Avec cela, Pt est la population du temps t, Po est le nombre d'habitants au début, r est le taux de la croissance annuel (c.-à-d. si le nombre d'habitants augmente dans un an de 1.5 %, le taux de croissance sera r=0,015) et t représente le nombre d'années suivant le début de l'observation.

4.1: le livre «Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum» est un livre scolaire américain traitant la modélisation mathématique et contenant un devoir qui indique que la population des États-Unis était 150.697.000 en 1950, et qu'on doit compter sur la base du modèle de Malthus la population des États-Unis en 1980 et en 2000 en supposant que le membre d'habitants augmente par 2 % annuellement.

4.2 : Selon le service fédéral des statistiques, les États-Unis avaient au début de 2000 274.338.367 habitants. Compare ce chiffre avec les résultats du devoir 4.1. Que pourrait être la raison de cette différence ? Y a-t- il une possibilité d'améliorer le modèle pour déterminer le nombre d'habitants en 2000 ?

5 Croissances de la population en Angleterre et en pays de Galles

Si la croissance de la population doit être analysée avec un modèle mathématique, il existe en général trois méthodes mathématiques possibles avec lesquelles on peut traiter le problème: numérique, graphique et symbolique.

Typiquement, on applique la méthode numérique quand on trouve des données dans un tableau comme au-dessous. Ce tableau montre le nombre de la population en Angleterre et en Pays de Galles entre 1801 et 1911 :

Year	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911
Mio.	8.89	10.16	12.00	13.9	15.91	17.93	20.07	22.71	25.97	29.00	32.53	36.07

Pour réaliser un tel tableau, il y a une méthode tout à fait simple pour déterminer la différence ou le quotient entre les valeurs des deux colonnes consécutives.

Si la différence est constante pour chacune des deux colonnes consécutives, la croissance de la population est alors linéaire.

Si le quotient est constant pour chacune des deux colonnes consécutives, la croissance de la population est alors exponentielle.

5.1: Décide si la croissance de la population en Angleterre et en Pays de Galles entre 1801 et 1911 est linéaire ou bien exponentielle.

Les méthodes graphiques peuvent aider à améliorer notre compréhension de la relation entre deux dimensions et permettent de l'illustrer clairement. Un graphique nous donne un aperçu sur la croissance de la population et nous permettent de lire le nombre d'habitants dans un an.

5.2 : construis un graphique qui donne le nombre d'habitants en Angleterre et en Pays de Galles à la période de 1801-1911

Finalement, nous avons la méthode symbolique. Ici nous déterminons les termes et les formules mathématiques, dont leurs symboles offrent les données au modèle. Un exemple de la méthode symbolique est la formule de Malthus du nombre d'habitants. L'expression mathématique peut être utilisée pour déterminer la population à un certain temps ou pour déterminer le changement du nombre d'habitants dans une certaine période.

5.3: réalise une expression mathématique qui décrit la relation entre la population en Angleterre et en Pays de Galles et le temps dans la période de 1801 jusqu'à 1911.

Puisque chaque méthode donne une perspective spécifique d'une situation, les modèles mathématiques contiennent normalement toutes les trois méthodes. Concernant la réalisation et l'application du modèle, les trois méthodes doivent être accomplies avec des explications et des argumentations.
Regarde la formule de Malthus présentait en 1798 (Devoir 4). Tu vois que celui-ci pensait que l'accroissement de la population augmente exponentiel. Dans son livre, il a écrit que le nombre d'habitants augmente d'une façon exponentielle, en revanche la production alimentaire augmente d'une façon linéaire. Selon Malthus, cela présente un problème sérieux : il pensait que le nombre d'habitants augmente si fort qu'après un siècle le manque des produits alimentaires mènera à une famine.

Sur la base de ce modèle, Malthus a proposé que le taux de natalité devra être baissé en se mariant le plus tard possible. Donc, Malthus craignait qu'une telle initiative entraîne une dégradation morale parce que cela mènerait vers plus de relations sexuelles avant le mariage.

Comment savons-nous que Malthus n'avait pas tout à fait raison. Mais, même si sa théorie était incorrecte, il a attiré notre attention qu'on peut à travers les mathématiques de décrire la croissance de la population et la croissance de la production alimentaire.

5.4: Regarde comment Malthus raisonnait la croissance exponentielle de la population et de l'augmentation linéaire de la production alimentaire. Détermine les facteurs qui influencent la croissance de la population et la production alimentaire. Détermine à l'aide de ces considérations la manière de croissance de la population par rapport à la croissance de la production

6 Désassimilation d'alcool

Le fait de déterminer le pourcentage d'alcool au sang après sa consommation peut être un grand avantage. Pour ce but, le chimiste suédois Widmark a développé un modèle mathématique afin de déterminer la teneur pour mille dans le sang.

Puisque l'alcool est hydrosoluble, il peut être distribué seulement dans l'eau du corps. Ainsi, si quelqu'un veut calculer le taux d'alcool, il doit déterminer la part de la masse du corps qui se compose d'eau. Widmark a développé le dit facteur de réduction avec lequel on peut déterminer la quantité de l'eau dans le corps. Ce facteur dépend du sexe.

$$r\ \text{Homme} = 0{,}3161 - 0{,}0048\ v + 0{,}0046\ h$$
$$r\ \text{Femme} = 0{,}3122 - 0{,}0064\ v + 0{,}0045\ h$$

Ici v signifie le poids du corps en kg et h signifie la taille en cm.

6.1: Détermine à l'aide de la formule mentionnée ci-dessus ton facteur de réduction

Widmark a pensé qu’avec la connaissance du facteur de réduction, on peut calculer le taux d'alcool dans le sang avec la formule suivante :

$$\boxed{C_t = \frac{n \cdot D}{r \cdot w} - \beta \cdot t}$$

Avec cela

C_t : est le taux d'alcool dans le sang (pour mille) au moment t.

n : est la quantité d’unités standards bus par une personne.

D : la quantité d'alcool par unités standard en gramme (une unité standard se compose de 12 g d'alcool)

r : est le facteur de réduction d'une personne.

w : est le poids de la personne.

ß : est le taux de métabolisme en gramme par litre (chez les hommes : 0,18; chez les femmes : 0,15).

t : est le temps par heures

6.2: Construis un graphique qui décrit l’évolution du taux d'alcool dans votre sang, si tu as bu 3,5 et 8 unités standard d'alcool.

6.3: Malte pèse 80 kg et d´une taille de 178 cm. Aujourd'hui, la police l'a arrêté et l'a sommé à souffler dans l'appareil de mesure d'alcool. L'appareil a mesuré chez celui-ci un taux d'alcool dans le sang de 0,93. Malte explique qu'il n'a rien bu depuis 3 heures. Si Malte dit la vérité, combien d'unités standards a-t-il bu avant trois heures ?

7 Médicaments dans le sang

Après leur consommation, la quantité des médicaments se diminue dans le corps en permanence. Pour décrire ce processus, nous utilisons un modèle partant du fait qu'un pourcentage déterminé du médicament diminue pendant un certain temps. Par exemple, on constate qu'après la prise d'un comprimé d'aspirine, les substances actives se diminuent pendant 30 minutes jusqu'à la moitié.

7.1: On suppose que tu prends 750 milligrammes d'aspirine.

(a) combien d'aspirine auras-tu dans le sang après 4 heures ?

(b) réalise un modèle symbolique avec lequel on peut déterminer la quantité d'aspirine dans le sang à un certain temps.

7.2 : construis un graphique qui présente la relation entre la quantité d'aspirines dans le sang et le temps.

Beaucoup de personnes prennent régulièrement des médicaments. Admettant que tu prends toutes les 4 heures 200 mg d'aspirines.

7.3: Comment paraît l'effet différé de cette prise régulière pendant une période de 4 jours ? C.-à-d. tu réalises un tableau et un graphique décrivant la relation entre le temps et la quantité des aspirines dans le sang.

7.4: Regarde le graphique réalisé dans le dernier devoir. De quelle cour de croissance s'agit-il ? Compare cela avec ce que tu sais sur la désassimilation de l'alcool? Est-ce que l'alcool et les médicaments sont éliminés différemment

8 Cellules de levure

Pour gagner du vin, on utilise les processus de fermentations naturels. Quant on presse les raisins, les cellules de levure sur la peau se mélangent avec l'intérieur de la grappe de raisin. Dans la fermentation, les cellules de levure transforment le fructose en alcool (Ethanol) et en bioxyde de carbone.

Pendant la fermentation, les levures passent par des phases différentes. Dans chaque phase, le changement du nombre des cellules de levure est différent.

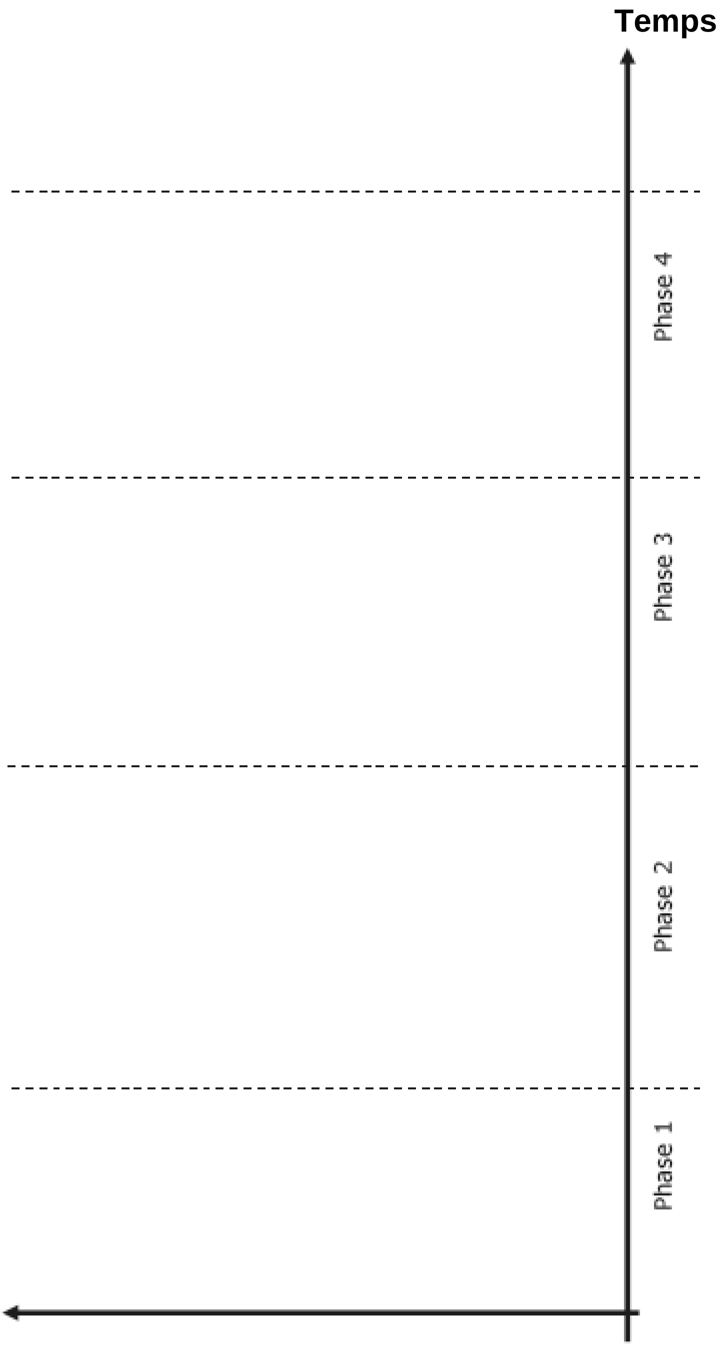
La phase initiale : à cette phase, les cellules de levure doivent s'adapter aux nouveaux alentours. Il ne se déroule presque aucune division cellulaire à cette phase. Si les cellules de levure s'adaptent aux nouveaux alentours, ils passent à la deuxième phase.

La phase exponentielle : à la deuxième phase, les cellules de levure se partagent avec un taux de croissance constant. À un certain niveau, les cellules de levure se partagent si souvent que la concentration de sucre ne suffit plus pour autant de cellules. À ce moment, les cellules de levure passent à la troisième phase.

La phase stationnaire : à la troisième phase, la quantité de cellules mourant est égale à la quantité de divisions cellulaires. Pendant tous ces phases, les cellules de levure vivant transforment le sucre en alcool (Ethanol) et en bioxyde de carbone. Mais l'alcool est un poison pour les cellules de levure, et à un certain moment, les cellules de levure ne survivent plus à autant d'alcool formé.

La phase de mort : c’est la dernière phase où les cellules de levure commencent en permanence à mourir. Ici, plus de cellules de levure meurent par rapport au déroulement des divisions cellulaires.

8.1: réalise un graphique qui décrit la croissance des cellules de levure dans les phases différentes.



8.2: la concentration d'alcool dépend de la quantité de cellules de levure. Plus les cellules de levure sont disponibles, plus l'alcool est formé. Chaque cellule de levure transforme une quantité de sucre déterminée en alcool et en dioxyde de carbone. Dans le dernier devoir tu as réalisé un graphique qui décrit la croissance des cellules de levure dans les phases différentes. Utilise cette description de la croissance à fin d'examiner comment se développe la concentration d'alcool avec le temps. Réalise un graphique qui décrit la croissance de la concentration d'alcool pendant un processus de fermentation.

Dans le tableau ci-dessous, tu trouves les résultats d'une expérience à laquelle la concentration d'alcool était mesurée régulièrement pendant un processus de fermentation.

Hours	5	10	15	20	25	30	35	40	60	80	100	120	140	200	250
Alcohol %	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	1,6	4,0	6,5	9,3	11,1	12	12,5	12,5

Source : http://w2.ef.dk/netbog/Htxopg/kap32.htm

8.3 : (a) compare ces résultats avec le graphique que tu as réalisé dans le devoir précédent. Est-ce que le graphique passe aux valeurs du tableau?

(b) Regarde les résultats des premières 40 heures de l'expérience. Vérifie, si la croissance de la teneur d'alcool entre 5 et 40 heures est exponentielle ou bien linéaire.

La croissance de la teneur d'alcool appartient à une sorte de croissance qui s'appelle la croissance logistique.

8.4: Utilise tout ce que tu sais sur la croissance de la teneur d'alcool pour décrire les qualités de la croissance logistique.

8.5: De nombreuses choses augmentent de manière logistique. Cherche quelques exemples de la croissance logistique. Décris, quels sont les facteurs pouvant en être responsables.

9 Mouche tsé-tsé

La tribu africaine Hilus gagne son argent par l'élevage de bétail. Le revenu annuel dépend du nombre de bétails vendu. Donc, le revenu de la tribu dépend du nombre de bétail de son troupeau. Puisqu'il pleut rarement sur les pâturages de la tribu, cette dernière a construit un système de fontaine et un système d'irrigation. Ils ont remarqué avec beaucoup de satisfaction que les pâturages prospèrent toujours avec l'irrigation. De plus, ils ont constaté que le chiffre des bétails se multiplie à cause du pâturage progressant en constance. La tribu a appris qu'il y a une relation entre le rendement des pâturages et la grandeur du troupeau : quand d'herbe pousse moins sur le pâturage, le troupeau devient plus petit.

Par conséquent, la tribu décide d'arroser les pâturages plus fréquemment. Mais l'irrigation répétée a un effet secondaire désagréable : les mouches tsé-tsé redouté commencent à se multiplier rapidement. Plus le pâturage est humide, plus les mouches tse-tse se multiplient. Et puisque les mouches tse-tse peuvent contaminer le bétail avec la maladie du sommeil mortelle, la tribu est en peine que le troupeau devient plus petit.

9.1: Essaie de décrire les relations mentionnées en sorte qu'on aura du premier coup d'œil un aperçu sur les facteurs les plus importants.

10 bilan du sujet de "la croissance"

Écris un résumé court sur toutes les choses liées au sujet. Le résumé doit finir par un bilan dans lequel tu écris les informations les plus importantes de ton travail à ce sujet - c.-à-d. quelles qualités mathématiques tu as découvert aux formes de croissance différentes. Tu peux évoquer aussi de la critique et poser des questions à ce sujet et à cette séquence d’enseignement. Finalement tu peux suggérer des changements etc.