ScienceMath-projekti: **Kasvun tutkiminen**
Idea: Claus Michelsen & Jan-Alexis Nielsen,
University of Southern Denmark, Odense, Tanska

.

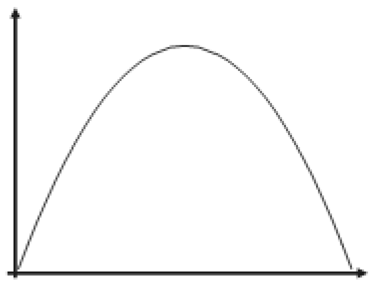
Kasvu

Tämä projekti on rahoitettu Euroopan komission tuella. Tämä julkaisu edustaa vain julkaisun kirjoittajien näkökulmaa, ja komissiota ei voida pitää vastuussa tässä julkaisussa esitetyistä tiedoista.

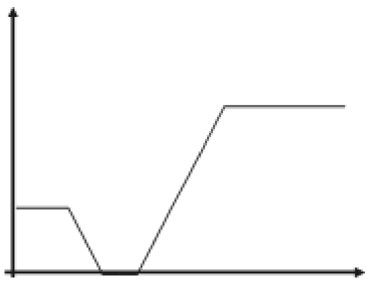
1. Graafit

Graafeja käytetään usein kuvailemaan jokapäiväisen elämän tilanteita, ja tässä osassa tutkimme joitakin esimerkkejä

1.1: Kuvittele tilannetta jostakin arkipäivän tilanteesta, jota alla oleva kuvaaja kuvaa. Selitä omin sanoin, mitä tapahtuu. Älä unohda määritellä mitä suureita annat akseleille.



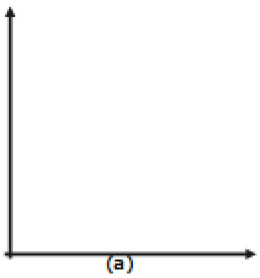
1.2: Kuvittele tilannetta jostakin arkipäivän tilanteesta, jota alla oleva kuvaaja kuvaa. Selitä omin sanoin, mitä tapahtuu. Älä unohda määritellä mitä suureita annat akseleille.

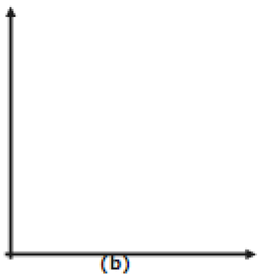


1.3: Jokaisessa seuraavassa tapauksessa sinun täytyy luonnostella kuvaaja, joka saattaisi edustaa tekstissä kuvattua tilannetta. Ennen kuvaajan piirtämistä harkitse tarkkaan, mitä suureita annat akseleille.

(a) Avaat kuumavesihanan. Juoksevan veden lämpötila riippuu ajasta, joka on kulunut hanan avaamisesta.

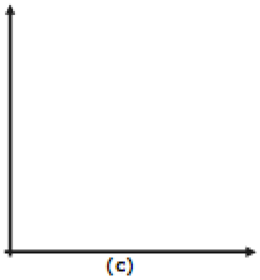
(b) Pudotat kumipallon kerrostalon toisen kerroksen ikkunasta. Pallon korkeus kadunpinnasta riippuu ajasta, joka on kulunut pallon pudottamisesta.

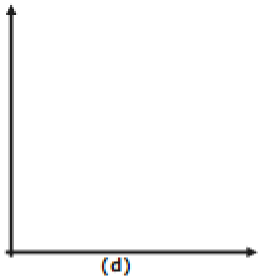

(a)


(b)

c) Olet kirkkaassa auringonpaisteessa ja kävelet pimeään huoneeseen. Pupilliesi halkaisija riippuu siitä, kuinka kauan olet ollut pimeässä huoneessa.

d) Talletat suuren määrän rahaa tilillesi, jolla on kiinteä korko. Rahan määrä tilillä riippuu ajasta, joka on kulunut rahan tallentamisesta tilille.

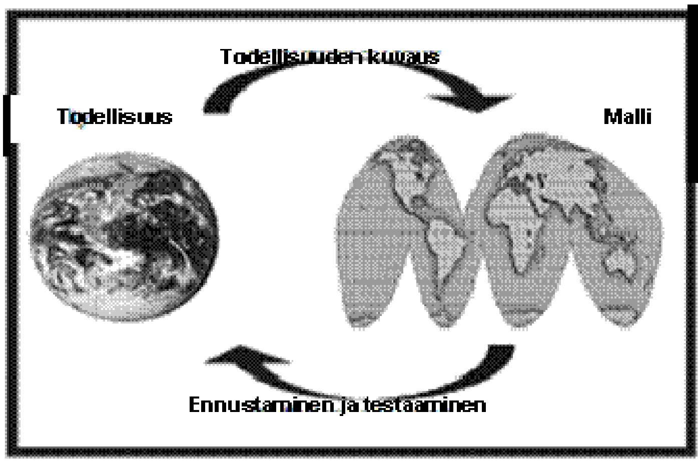

(c)


(d)

ScienceMath-projekti: **Kasvun tutkiminen**
Idea: Claus Michelsen & Jan-Alexis Nielsen,
University of Southern Denmark, Odense, Tanska

2 Matemaattiset mallit

Tärkeä syy, miksi kannattaa opetella matematiikkaa on se, että oppimalla matematiikkaa, oppii ratkaisemaan myös ongelmia oikeassa elämässä. Ongelma-alueet, joita kuvailla matematiikan avulla, ovat yleensä hyvin monimutkaisia. Siksi voi olla hyvä helpottaa ja idealisoida tilannetta. Siksi oikean elämän tilanteiden matemaattiset kuvaukset ovat nimeltään matematiikan todellisuusmalleja.



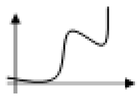
On muitakin malleja
Kuin matemaattiset
mallit
Maailman kartta on
yksi tällainen malli

Matemaattisen mallin luominen ja soveltaminen on yleensä prosessi, jossa yksittäisiä vaiheita täytyy toistaa. Ensimmäinen malli tyypillisesti tuottaa joitakin ennusteita käsiteltävästä probleemasta. Näitä ennusteita voidaan testata tietoa keräämällä. Tämä testi saattaa johtaa puolestaan mallin parannuksiin, ja siten johtaa edelleen uusiin prognooseihin, joita voidaan taas testata. Toistamalla tätä prosessia päästään uusiin, hyvin tarkkoihin prognooseihin oikean elämän tilanteista.

Matemaattisen mallin luomisessa käytetään usein jotakin seuraavista tavoista.
1. Annettaisiin numeerinen kuvaus, jossa järjestettäisiin tietoja taulukkoon, joka kuvaa tiettyä kehitystä.
2. Annettaisiin symbolisen kuvaus, jossa käytettäisiin matemaattisia symboleita ja ilmaisuja, joka kuvaavat tiettyä kehitystä.
3. Annettaisiin graafinen kuvaus, jossa kuvailtaisiin jotakin tilannetta koordinaatistossa olevan kuvaajan avulla.

Height	160	171	172
Weight	66	68	75

$P = \alpha \cdot t + \beta$



Numeerinen tapa Symbolinen tapa Graafinen tapa

Sanalliset mallit

Ennen matemaattisen mallin muodostamista tilannetta kannattaa kuvailla sanallisesti. Siten voi olla helpompi nähdä, kuinka matemaattinen malli rakentuu. Siksi jotkut matemaattiset mallit alkavat jollakin nyrkkisäännöllä – yksinkertainen sanallinen kuvaus jostakin tosielämän tilanteesta. Hyvä esimerkki nyrkkisäännöstä – tai sanallisesta mallista on:
"Pituutesi kahden vuoden iässä on puolet siitä, miten pitkä olet aikuisena."

Kun sellainen sanallinen malli on muodostettu, on mahdollista jatkaa matemaattisen mallin rakentamista perustuen sanalliseen malliin.

2.1. Anna esimerkkejä matemaattisista malleista. Selvitä, mistä tiedät nämä ennestään, ja missä niitä käytetään. Käytä sanallisia ja numeerisia malleja, kuvaajia ja symbolisia tapoja antamaan lisävalaisua mallista.

Tässä on nyrkkisääntö alla olevan tehtävän suorittamiseen:

” Ilmakehä aiheuttaa suurin piirtein 760 torrin paineen. Normaali-ilmakehä (atm) onkin määritelty juuri 760 torriksi. Jos nesteenä käytettäisiin elohopean sijasta vettä, ilman paine työntäisi sen noin 10 metrin korkeuteen. Ilmakehän paine puristaa meitä siis samalla voimalla kuin tyhjiössä oleva 10 metrin paksuinen kerros vettä.”

2. 2. Oletetaan, että ilmanpaine merenpinnan tasolla on 1 ilmakehä. Anna matemaattinen kuvaus yllämainitusta nyrkkisäännöstä.

Matemaattisia malleja, joissa kahden muuttujan suhdetta kuvataan suoraviivaisena, sanotaan lineaarisiksi malleiksi.

2.3. Millä keinoilla voidaan selvittää, voidaanko kahden muuttujan suhdetta kuvata lineaarisella mallilla?

2.4. Anna esimerkkejä lineaarisista malleista. Selitä, mistä tiedät mallit ennestään ja mihin niitä voi käyttää.

Alla oleva taulukko löytyy englantilaisesta J. Berry ja K. Houstonin matematiikan kirjasta *Mathematical Modelling:*

Esimerkki 2. Mailin juoksun maailmanennätykset

Taulukon otsikot suomeksi vasemmalta alkaen ovat: Aika (mailin juoksuun käytetty aika), nimi, Maa, päivämäärä, suorituspaikka.

Example 2 World Record for the Mile

Table 1.2 shows the world record for the mile in minutes and seconds between 1913 and 1986

Time	Name	Country	Date	Place
4:14.4	John Paul Jones	USA	31.5.1913	Cambridge, Mass.
4:12.6	Norman Taber	USA	16.7.1915	Cambridge, Mass.
4:10.4	Paavo Nurmi	FIN	23.8.1923	Stockholm
4:09.2	Jules Ladoumegue	FRA	4.10.1931	Paris
4:07.6	Jack Lovelock	NZL	15.7.1933	Princeton, N.J.
4:0.6.8	Glen Cunningham	USA	16.6.1934	Princeton, N.J.
4:0.6.4	Sydney Wooderson	GBR	28.8.1937	Motspur Park
4:06.2	Gunder Hagg	SWE	1.7.1942	Gothenburg
4:06.2	Arne Andersson	SWE	10.7.1942	Stockholm
4:04.6	Gunder Hagg	SWE	4.9.1942	Stockholm
4:02.6	Arne Andersson	SWE	1.7.1943	Gothenburg
4:01.6	Arne Andersson	SWE	18.7.1944	Malmo
4:01.4	Gunder Hagg	SWE	17.7.1945	Malmo
3:59.4	Roger Bannister	GBR	6.5.1954	Oxford
3.58.0	John Landy	AUS	21.6.1954	Turku, Finland
3:57.2	Derek Ibbotson	GBR	19.7.1957	London
3:54.5	Herb Elliott	AUS	6.8.1958	Dublin
3:54.4	Peter Snell	NZL	27.1.1962	Wanganui
3:54.1	Peter Snell	NZL	17.11.1964	Auckland
3:53.6	Michel Jazy	FRA	9.6.1965	Rennes
3:51.3	Jim Ryun	USA	17.7.1966	Berkeley, Calif.
3:51.1	Jim Ryun	USA	23.6.1967	Bakersfield, Calif.
3:51.0	Filbert Bayi	TAN	17.5.1975	Kingston, Jamaica
3:49.4	John Walker	NZL	12.8.1975	Gothenburg
3:49.0	Seb Coe	GBR	17.7.1979	Oslo
3:46.31	Steve Cram	GBR	27.7.1985	Oslo
3:44.39	Noureddine Morceli	ALG	5.9.1993	Rieti

Table 1.2 The world record for the mile

2.5. Mitä tietoa edellä olevassa taulukossa on annettu? Onko mahdollista kuvata päivämäärän ja maailmanennätyksen välistä suhdetta lineaarisella mallilla? Jos sellainen on mahdollista, piirrä sellainen malli.

2.6. Arvioi taulukon perusteella, mitkä voisivat on maailmanennätysaikoja vuosina 2010, 2020 ja 2030. Ja perustele arviosi.

3. Martta ja Marius

Martta ja Marius käyvät lukiota. Martta rakastaa lukemista. Hänen pöydällään on pinottuna 5 kirjastosta lainattua kirjaa. Joka viikko hän palauttaa näistä 4 kirjaa kirjastoon ja samalla lainaa 4 uutta kirjaa.

3.1. Piirrä kuvaaja, joka esittää kirjojen lukumäärän kasvun Martan kirjapinossa 10 viikon aikana, ja lue kuvaajasta, mikä on kirjojen määrä Martan kirjapinossa 8 viikon jälkeen.

Martta and Marius haluaisivat katsoa käsipallon Euroopan mestaruuskisoja. He puhuvat siitä, kannattaisiko heidän ostaa vai vuokrata televisio. Jotta he voisivat saada hieman lisävalaistusta ongelmaan, he päättävät piirtää siitä matemaattisen mallin.

3.2. Mitä tekijöitä tällaiseen malliin pitäisi ottaa mukaan? Piirrä malli, jonka avulla Martta ja Marius voisivat päättää kannattaako televisio ostaa vai vuokrata.

Martta tekee ahkerasti läksyjä, mutta Marius on laiska. Martta ja Marius saavat keskimäärin 2 uutta kotitehtävää joka viikko. Marius palauttaa kaksi tehtävää joka toinen viikko. Kouluvuosi on 40 viikon mittainen, ja jokainen tehtävä pitää palauttaa.

3.3. Piirrä kuvaaja, joka esittää Mariuksen tehtävien palauttamistahtia. Kuinka monta tehtävää Mariukselta puuttuu 10 viikon jälkeen? 20 viikon? 40 viikon?

Talvilomalla Martta ja Marius työskentelevät urheiluhotellissa Ruotsissa. Hotellinjohtaja Mats Matte on saanut tietää, että Martta ja Marius osaavat matemaattista mallinnusta. Hän pyytää heitä muodostamaan mallin, joka selkeästi osoittaa ja laskee kuinka monta vierasta tulee majoittumaan hotellissa 14 päivän kiireisen ajanjakson kunakin päivänä. Mats kertoo, että hotellissa on viikon alussa 220 vierasta. Ensimmäisenä neljänä päivänä 40 vierasta lähtee hotellista joka päivä, ja 10 uutta vierasta saapuu. Viidentenä päivänä ja siitä eteenpäin 20 vierasta lähtee hotellista joka päivä. Viidentenä ja kuudentena päivänä saapuu 30 uutta vierasta, ja seitsemäntenä päivänä ja siitä eteenpäin 50 uutta hotellivierasta saapuu joka päivä.

3.4. Anna Martalle ja Mariukselle esimerkki siitä, kuinka he voisivat piirtää matemaattisen mallin siitä, kuinka monta vierasta majoittuu päivittäin hotellissa 14 päivän aikana.

Kun yllä olevan mukaisia tilanteita analysoidaan matemaattisten mallien avulla, on olemassa useita eri mahdollisuuksia mallin luomiselle. Malli voidaan muodostaa

- sanallisena kuvauksena
- yhtälönä
- kuvaajana
- taulukkona

Pohdi, mihin eri tilanteisiin ja muutoksiin edellä lueteltuja mallinnusmuotoja voisi käyttää ja keksi esimerkki kustakin käyttötilanteesta.

4. Väestön kasvu

Viranomaisten ja päätöksentekijöiden on tärkeää tietää, kuinka paljon maassa on asukkaita, pystyäkseen suuntaamaan varoja armeijalle, liikenteelle, kouluille, terveyden – sairaanhoitoon jne.

Kiinnostus väestömäärän kehitykseen alkoi 1700 – luvulla. Siihen aikaan huomio kiinnittyi väestömäärän ja luonnon resurssien kulutuksen väliseen suhteeseen. Vuonna 1798 brittiläinen ekonomisti Thomas R. Malthus (1766 -1834), julkaisi kirjan *Essay on Principle on Population*, jossa hän esitti matemaattisen mallin väestön kasvulle. Malthusin mallille voidaan antaa symbolinen kuvaus tämän kaavan suhteen:

$$Pt = Po\cdot(1 + r)t$$

Tässä Pt on väestön koko hetkellä t, Po on alkuperäinen väestön koko, r on vuosittainen kasvuaste (esim. jos vuosittainen väestön kasvu on 1,5 % kasvuaste olisi r= 0,015), ja t on vuosien määrä aloitusvuoden jälkeen.

4.1. Kirja *“Mathematical modelling in Secondary School Curriculum”* on amerikkalainen oppikirja matemaattisesta mallinnuksesta, ja se sisältää tehtävän, jonka mukaan Yhdysvaltain asukasmäärä oli vuonna 1950 150’697’000 asukasta, näin ollen Yhdysvaltain väestön määrä vuosina 1980 ja 2000 täytyy laskea Malthusin mallin avulla olettaen, että vuosittainen väestömäärän kasvu on 2%. Ratkaise tämä tehtävä.

15. US Census Bureaun väestönlaskentaosaston mukaan Yhdysvaltojen väestömäärä vuoden 2000 alussa oli 274’338’367 asukasta. Vertaile tätä tehtävän 4.1 vastaukseen. Mikä voisi olla syynä niiden väliselle erolle, ja voisiko väestön määrän kasvun kuvausta vuonna 2000 parantaa?

5. Väestön kasvu Englannissa ja Walesissa

Kun väestönkasvua analysoidaan matemaattisten mallien avulla on kolme mahdollista matemaattista tapaa joiden avulla voidaan lähestyä käsiteltävää aihetta: numeerinen, graafinen ja symbolinen.

Numeerista tapaa käytetään tyypillisesti silloin, kun käsitellään taulukossa olevia tietoja, kuten alla olevaa taulukkoa. Tämä taulukko näyttää asukkaiden määrän Englannissa ja Walesissa vuosien 1801 – 1911 välillä:

Vuosi	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911
Milj.	8,89	10,16	12,00	13,9	15,91	17,93	20,07	22,71	25,97	29,00	32,53	36,07

Hyvin yksinkertainen tapa lähestyä tällaista taulukkoa on määritellä kahden vierekkäisen sarakkeen lukujen erotus.

Jos ero kahden peräkkäisen sarakkeen välillä on vakio jokaisessa sarakkeessa, niin väestönkasvu on lineaarista.

Jos kahden vierekkäisen luvun suhde pysyy samanlaisena jokaisessa sarakkeessa, niin väestönkasvu on eksponentiaalista.

5.1. Määritä, oliko väestönkasvu Englannissa ja Walesissa vuosien 1801 ja 1911 välillä on lineaarista vai eksponentiaalista?

Graafiset menetelmät saattavat helpottaa ymmärtämään kahden suureen välistä suhdetta ja helpottaa myös suhteen kuvailemista sanallisesti. Kuvaaja tarjoaa yleisnäkymän siitä, kuinka väestöluku on kasvanut ja on mahdollista myös lukea asukasluku joltakin tietyltä vuodelta.

5.2. Piirrä kuvaaja väestömäärien muutoksista Englannissa ja Walesissa vuosien 1801 ja 1911 välillä.

Lopuksi on vielä symbolinen esitystapa, joka tehdään muodostamalla matemaatinen lauseke, joissa symbolit edustavat suureita, jotka kuvaillan mallissa. Esimerkki symbolisen tavan käytöstä on Malthusin kaava väestömäärän laskemiseksi. Matemaattista lauseketta voidaan käyttää laskemaan väestömäärä tiettynä aikana, tai laskemaan kuinka paljon väestömäärä muuttuu tietyn jakson aikana.

5.3. Muodosta matemaattinen lauseke joka kuvailee väestömäärän suhdetta Englannissa ja Walesissa vuosien 1801 ja 1911 välillä.

Koska jokainen kuvaustapa tarjoaa oman ja erilaisen näkökulman tilanteeseen, matemaattiset mallit sisältävät normaalisti kaikki esitetyt kolme tapaa. Jokaista tapaa pitäisi täydentää selityksin ja pitäisi perustella kuinka malli on luotu ja kuinka sitä sovelletaan.

Tutki kaavaa, jonka Malthus esitti vuonna 1798 (edellä olevassa harjoituksessa numero 4). Näet, että hän ajatteli, että väestön määrä kasvaa eksponentiaalisesti. Kirjassaan hän kirjoitti, että väestö kasvaa eksponentiaalisesti kun taas luonnonresurssit kasvavat lineaarisesti. Malthuksen mukaan tästä seuraa vakava ongelma: hän ajatteli että maailman väestö kasvaa niin nopeasti, että vuosisadan jälkeen luonnonresurssien loppuminen johtaisi nälänhätään.

Tämän mallin perusteella Malthus suositteli, että syntyvyyttä pitäisi hidastaa myöhentämällä naimisiinmenoikää. Malthus kuitenkin pelkäsi, että sellainen aloite johtaisi moraalin rappeutumiseen, koska se johtaisi lisääntyviin esiaviollisiin seksisuhteisiin.

Kuten tiedämme nyt, Malthus ei ollut ihan oikeassa. Mutta vaikka hänen teoriansa oli väärä, hän suuntasi huomiomme siihen tosiasiaan, että väestön kasvua ja luonnon resurssien kasvua voidaan kuvailla matemaattisin keinoin.

5.4. Mieti, miksi Malthus ajatteli niin, että väestö kasvaa eksponentiaalisesti kun taas luonnonresurssit kasvavat lineaarisesti. Kuvaile tekijöitä, jotka vaikuttavat väestönkasvuun ja tekijöitä, jotka vaikuttavat luonnonresurssien tarjontaan. Käytä näitä arvioita miettiessäsi, millaista kasvua käsitellään, kun puhutaan luonnonresurssien riittävyydestä.

6. Alkoholin haihtuminen

Joskus on tarpeen tietää alkoholin määrä veressä tiettynä aikana alkoholin nauttimisen jälkeen. Siksi ruotsalainen kemisti Widmark kehitti matemaattisen mallin veren alkoholipitoisuudelle (mitattuna alkoholipromilleina veressä).

Koska alkoholi on vesiliukoista, se voi jakautua ainoastaan vedessä. Jos näin ollen, halutaan laskea veren alkoholipitoisuus, täytyy ensin varmistaa, kuinka paljon henkilön ruumiin massasta muodostuu vedestä. Widmark kehitti niin sanotun pienennyskertoimen r, jonka avulla voidaan laskea, kuinka paljon vettä kunkin ruumis sisältää. Tämä kerroin riippuu on sukupuolesta riippuvainen:

$$r_{Mies} = 0{,}3161 - 0{,}0048 \cdot v + 0{,}0046 \cdot h$$
$$r_{Nainen} = 0{,}3122 - 0{,}0064 \cdot v + 0{,}0045 \cdot h$$

kaavassa v tarkoittaa henkilön painoa kiloissa, ja h henkilön pituutta.

6.1. Voit laskea alkoholin haihtumiskertoimen itsellesi tätä kaavaa käyttämällä.

Widmark ajatteli, että jos henkilön pienennyskerroin tiedetään, on mahdollista laskea henkilön veren alkoholipitoisuus tällä kaavalla.

$$C_t = \frac{n \cdot D}{r \cdot w} - \beta \cdot t$$

Kaavassa
C_t on veren alkoholipitoisuus (mitattu alkoholigrammoina litraa verta kohti) ajankohtana t.
n on standardi alkoholiyksikköjen määrä, jonka henkilö on juonut.
D on alkoholin määrä standardiyksikköinä alkoholia, grammoina (standardiyksikkö sisältää 12 grammaa alkoholia).
r henkilön alkoholin haihtumiskerroin.
w henkilön paino kiloina.
β aineenvaihdunnan aste grammoissa per litra per tunti (miehillä: 0,18; naisilla: 0,15).
t aika tunteina.

6.2. Piirrä kuvaaja, joka kuvailee veresi alkoholipitoisuuden kehittymistä, jos nautit 3, 5, and 8 yksikköä alkoholia. Mikä on veren alkoholipitoisuus jokaisessa kolmessa tapauksessa 4, 6 ja 8 tunnin jälkeen?

6.3. Matti painaa 80 kiloa ja hän on 178 cm pitkä. Tänään poliisi pysäytti hänet, ja pyysi puhaltamaan alkometriin. Hänen verensä alkoholipitoisuus oli 0,93. Matti selitti, että hänen viimeisestä juomastaan oli 3 tuntia aikaan. Kuinka monta alkoholiyksikkö Matti oli juonut 3 tuntia sitten jos hän puhui totta?

7. Veren lääkeainepitoisuus

Kun lääkettä otetaan, se puoliintuu elimistössä asteittain. Jotta tätä prosessia voidaan kuvailla, käytetään mallia, jossa oletetaan että tiettynä aikana tietty prosenttiosuus lääkettä puoliintuu. Esimerkiksi ajatellaan, että kun henkilö nielee aspiriinia, puolet lääkkeestä on puoliintunut 30 minuutissa.

7.1. Oletetaan että otat 750 mg aspiriinia.

(a) Kuinka paljon aspiriinia on veressäsi 4 tunnin jälkeen?

(b) Muodosta matemaattinen lauseke, jonka avulla voidaan laskea aspiriinin määrä veressä tiettynä ajankohtana.

7.2. Piirrä kuvaaja joka kuvailee suhdetta veren aspiriinipitoisuuden ja ajan välillä.

7.3. Mitä on pitkäaikainen vaikutus (esim. 4 päivän sisällä) säännöllisesti lääkkeen nauttimisesta? Esim. tee taulukko ja piirrä kuvaaja, joka kuvailee suhdetta ajan ja veren aspiriinimäärän välillä.

7.4. Katso kuvaajaa, jonka piirsit edellisessä harjoituksessa. Minkä tyyppisestä kehityksestä tässä on kyse? Vertaile tätä siihen, mitä tiedät ennestään alkoholin haihtumisesta elimistöstä.
Puoliintuvatko alkoholi ja lääke eri tavoilla?

8. Hiivasolut

Viinin teossa käytetään hyväksi luonnollista käymisprosessia. Kun viinirypäleet murskataan, hiivasolut viinirypäleiden pinnalla sekoittuvat hedelmän mehuun. Käymisprosessissa hiivasolut muuttavat sokerit alkoholiksi (etanoliksi) ja hiilidioksidiksi Käymisprosessissa hiivasolut kulkevat eri vaiheiden läpi. Joka vaiheessa hiivasolujen määrän kehitys on erilainen.

Alkuvaihe: Alkuvaiheessa hiivasolujen täytyy sopeutua uuteen ympäristöön. Tässä vaiheessa ei tapahdu oikeastaan yhtään solujen jakautumista. Kun hiivasolut ovat sopeutuneet ympäristöönsä, ne siirtyvät toiseen vaiheeseen.

Eksponentiaalinen vaihe: Toisessa vaiheessa hiivasolut jakautuvat tasaisella vauhdilla Jonkun ajan kuluttua solut ovat jakautuneet niin monta kertaa, että sokeripitoisuus ei pysty kannattamaan niin monia hiivasoluja. Tällöin hiivasolut siirtyvät kolmanteen vaiheeseen. Pysyvä vaihe: Kolmannessa vaiheessa kuolevien hiivasolujen määrä on melkein sama kuin solujakautumisten määrä. Kaikissa näissä vaiheessa elävät hiivasolut ovat muuttaneet sokerit alkoholiksi (etanoliksi) ja hiilidioksidiksi, mutta alkoholi on myrkyllistä hiivasoluille ja jonkun ajan kuluttua on tuotettu niin paljon alkoholia, että solut eivät voi enää selvitä elossa.

Kuolemavaihe: Viimeisessä vaiheessa hiivasolut alkavat kuolla asteittain. Tässä vaiheessa soluja kuolee enemmän kuin jakautuu.

8.1. Piirrä graafi, joka kuvaa hiivasolujen kasvua eri vaiheissa

8.2. Alkoholipitoisuus riippuu hiivasolujen määrästä. Mitä enemmän hiivasoluja, sitä enemmän alkoholia syntyy. Jokainen hiivasolu muuttaa tietyn määrän sokeria alkoholiksi ja hiilidioksidiksi. Aiemmassa harjoituksessa piirsit kuvaajan, jolla kuvailtiin hiivasolujen kasvua eri vaiheissa. Käytä tätä kuvausta pohtiessasi kuinka alkoholipitoisuus kehittyy ajan myötä. Piirrä kuvaaja, joka kuvaa kuinka alkoholipitoisuus kasvu käymisprosessissa.

Alla olevassa taulukossa on tuloksia, joita on kokeessa, jossa alkoholipitoisuutta mitattiin säännöllisesti käymisprosessin aikana.

Tuntia	5	10	15	20	25	30	35	40	60	80	100	120	140	200	250
Alkoholi %	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	1,4	4,0	6,5	9,3	11,1	12	12,5	12,5

Lähde: http://w2.ef.dk/netbog/Htxopg/kap32.htm

8.3. (a) Vertaile näitä tuloksia siihen kuvaajan, jonka piirsit edellisessä harjoituksessa. Täsmääkö kuvaajasi näihin numeerisiin tietoihin?

(b) Katso tuloksia kokeen 40 ensimmäisen tunnin ajalta. Tutki onko alkoholipitoisuuden kasvu 5 ja 40 tunnin välillä eksponentiaalista vai lineaarista.

c) Käytä sitä mitä tiedät ennestään alkoholiprosenttiosuuden kasvusta kuvailemaan mikä on tyypillistä logistiselle kasvulle.

8.4. Monet asiat kasvavat logistisesti. Etsi esimerkkejä asioista, jotka kasvavat logistisesti Kuvaille, mitkä tekijät voisivat olla vastuussa siitä, että asiat kasvavat logistisesti.

9. Tsetsekärpäset

Afrikkalainen Hilus - heimo saa elantonsa karjakasvatuksella. Heimon tulot riippuvat siitä, kuinka paljon karjaa myydään vuosittain Mitä suurempi heimon karja lauma on, sitä suuremmat ovat heimon tulot. Koska siellä, missä karja laiduntaa, sataa harvoin, heimo on rakentanut kaivon ja kastelujärjestelmän. Tyytyväisenä he ovat huomanneet, että laitumista tulee sitä viljavampaa mitä enemmän sitä kastellaan. Lisäksi he ovat huomanneet että lauman koko kasvaa kun laitumesta tulee viljavampi. Heimo on siis oppinut, että on olemassa suhde laitumien viljavuuden ja lauman koon välillä; mitä vähemmän ruohoa laitumella kasvaa, sitä pienempi lauma.

Tästä johtuen heimo aikoo kastella laidunta jopa vielä säännöllisemmin. Mutta toistuvalla kastelulla on epämiellyttävä sivuvaikutus: pelättyjen tsetsekärpäsien määrä alkaa kasvaa hyvin nopeasti. Mitä kosteampi laidun, sitä enemmän tsetsekärpäset lisääntyvät, ja koska tsetsekärpäset voivat tartuttaa karja usein kuolemaan johtavalla unitaudilla, heimo on huolissaan siitä, että karjan koko pienenee.

9.1. Yritä luonnostella mainitut suhteet niin, että luonnos tarjoaa yhdellä silmäyksellä yleisnäkymän tärkeimpiin tekijöihin.

10. Yhteenveto kasvun tutkimisesta

Kirjoita lyhyt yhteenveto tehtävistäsi liittyen aiheeseen. Yhteenvedon täytyy päättyä päätelmään, mitä pidät työsi tärkeimpinä tuloksia tässä aiheessa – eli mitkä matemaattiset erilaisia kasvufunktioiden ominaisuuksia olet löytänyt. Voit myös kritisoida ja tehdä kysymyksiä koskien aihetta ja kurssia. Lopuksi voit ehdottaa muutoksia yms.