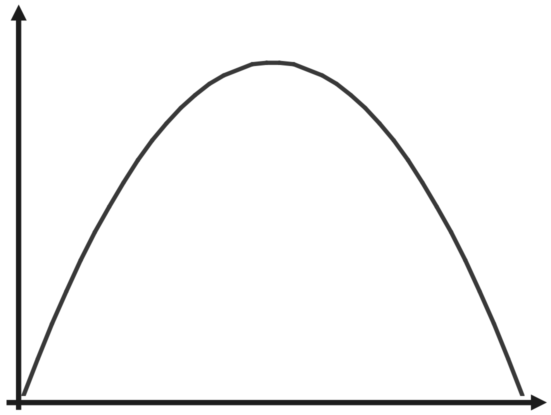
Crecimiento

El presente proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea. Esta publicación (comunicación) es responsabilidad exclusiva de su autor. La Comisión no es responsable del uso que pueda hacerse de la información aquí difundida.

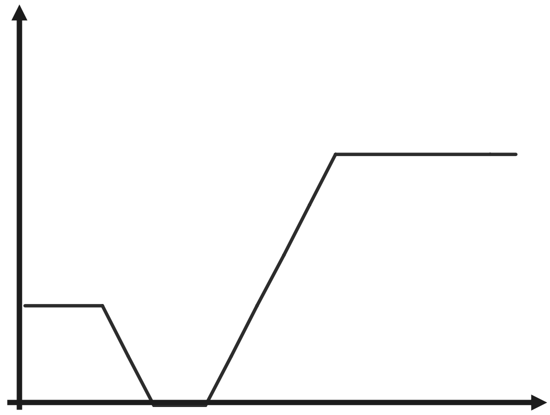
1 Gráfico

Los gráficos son generalmente usados para describir situaciones del día a día, y en ésta sección vemos algunos ejemplos.

1.1: Intente imaginar una situación del cada día el cual describa el siguiente gráfico. Explique con su propias palabras que pasa en esta situación. Recuerde señalar qué cantidades son asignadas para los dos ejes.



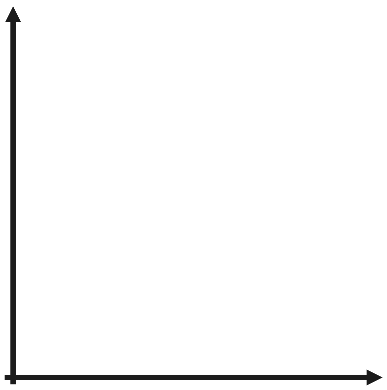
1.2: Intente imaginar una situación del cada día el cual describa el siguiente gráfico. Explique con su propias palabras que pasa en esta situación. Recuerde señalar qué cantidades son asignadas para los dos ejes.



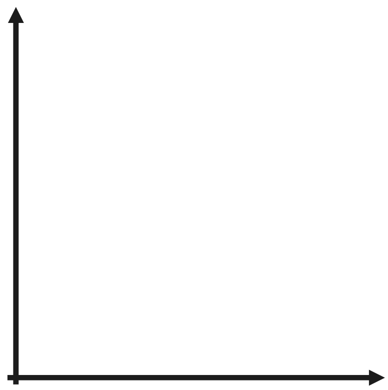
1.3: En cada uno de los siguientes casos tiene que realizar un gráfico que represente la situación descrita. Antes de desarrollar el gráfico, considere cuidadosamente que cantidades va a asignar a los ejes.

(a) Abre el grifo del agua caliente. La temperatura del agua depende de la cantidad de tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.

(b) Usted tira una pelota de plástico por la ventana del 2do piso. La altura de la pelota al nivel del piso depende del tiempo transcurrido desde que usted tira la pelota.



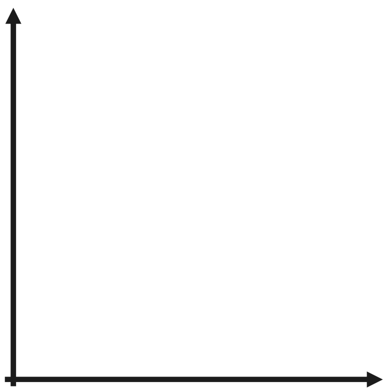
(a)



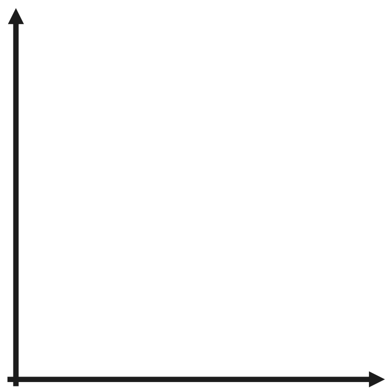
(b)

(c) Usted se encuentra en un area soleada y luego se dirige a una habitación oscura. El diametro de su pupila depende de cuanto tiempo ha permanecido en la habitación oscura.

(d) Usted deposita cierta cantidad de dinero en el banco con un interés fijo. La cantidad de dinero en la cuenta depende del tiempo que este dinero permanezca depositado.



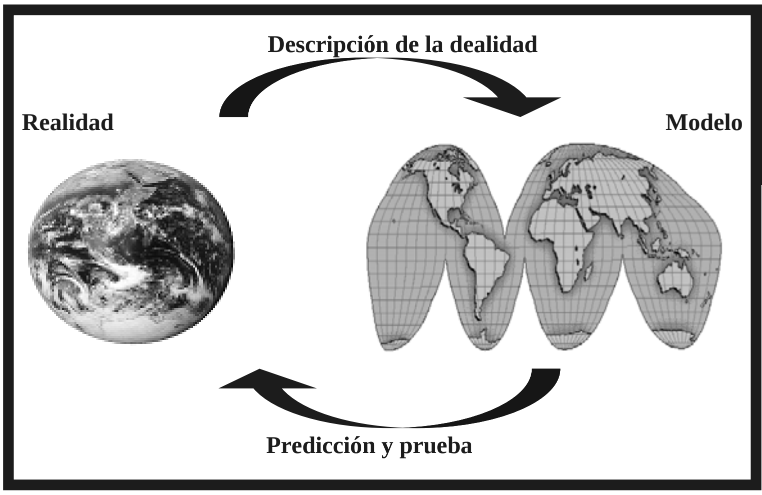
(c)



(d)

2 Modelos matamáticos

Una razón importante para aprender matemáticas es que al hacerlo se obtienen métodos para resolver problemáticas de la vida real. Las áreas de los problemas que son descritas usando matemáticas son en general inmensamente complejas. Por ello puede ser necesario el simplificar e idializar la situación. Por eso las descripciones matemáticas de las situaciones de la vida real son llamadas *modelos matemáticos* de la realidad



Existen otros modelos aparte de los matemáticos. Un mapamundo es un modelo de la realidad

La construcción y el uso de un modelo matemático es generalmente un proceso en el cual los pasos individuales deben ser repetidos. El primer modelo rinde típicamente algunas predicciones en el problema que tenemos. Estas predicciones pueden ser comprobadas por la recolección de datos. Esta prueba puede, alternadamente, llevar a las mejoras en el modelo y de tal modo a las nuevas predicciones, que, pueden ser probadas otra vez. La repetición de este proceso lleva a menudo predicciones muy exactas en situaciones de la vida real.

La construcción de un modelo matemático incluye en general uno de los siguientes métodos.

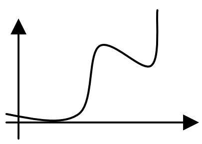
1. Uno puede dar una descripción *numerica*. Aquí uno arreglaría generalmente una serie de datos en una tabla que describe un desarrollo específico..
2. Uno puede dar una descripción *simbólica*. Aquí uno utilizaría símbolos matemáticos y expresiones para describir un desarrollo específico.
3. Uno puede dar una descripción *gráfica*. Aquí uno describiría una situación por medio de un gráfico en un sistema de coordenadas.

Altura	160	171	172
Peso	66	68	75

Método Numérico

$$P = \alpha \cdot t + \beta$$

Método simbólico



Método gráfico

Modelos verbales

Antes de contruir un modelo matemático de una situación es una buena idea el describir esa situación con palabras. De esa manera puede ser más fácil ver cómo el modelo matemático puede ser construido. Esta es la razón por la cual algunos modelos matemáticos comienzan como *reglas empíricas* - una descripción simple con palabras de una situación de la vida real. Un buen ejemplo de una regla empírica - o un modelo verbal - es:

> “Su estatura a los 2 años es la mitad de su altura como adulto”

Teniendo contruido un modelo verbal es posible continuar con la construcción del moelo matemático con base al modelo verbal.

2.1: Dé ejemplos de modelos matemáticos. Diga de dónde conoce estos modelos y qué usos tienen. Utilize modelos verbales, y numéricos, gráficos y simbólicos métodos para iluminar los modelos.

He aquí una regla empírica:

> ”Entre más profundo se sumerge un buzo, mayor es la presión atmosférica al cual está expuesto. Cuando la profundidad aumenta 10 metros la presión aumenta a 1 atm”

2.2: Suponga que la presión el nivel del mar es de 1 atm. Dé una desripción matemática de la regla empírica mencionada arriba.

Los modelos matemáticos donde las relaciones entre dos cantidades pueden ser descritas por una linea recta en un sitema de coordenadas son llamados *modelos lineales*.

2.3: ¿Cuáles métodos pueden ser usados para determinar si la relación entre dos cantidades pueden ser descritas por un modelo lineal?

2.4: Dé ejemplos de modelos lineales. Diga de dónde conoce estos modelos, y cómo pueden ser usados.

La siguiente tabla fue encontrada en un libro de matemática *El modelamiento matemático* por J. Berry y K. Houston:

Ejemplo 2 Record Mundial por Milla

La Tabla 1.2 muestra el record mundial de millas por minutos y segundos entre 1913 y 1986

Tiempo	Nombre	Pais	Fecha	Lugar
4:14.4	John Paul Jones	USA	31.5.1913	Cambridge, Mass.
4:12.6	Norman Taber	USA	16.7.1915	Cambridge, Mass.
4:10.4	Paavo Nurmi	FIN	23.8.1923	Stockholm
4:09.2	Jules Ladoumegue	FRA	4.10.1931	Paris
4:07.6	Jack Lovelock	NZL	15.7.1933	Princeton, N.J.
4:0.6.8	Glen Cunningham	USA	16.6.1934	Princeton, N.J.
4:0.6.4	Sydney Wooderson	GBR	28.8.1937	Motspur Park
4:06.2	Gunder Hagg	SWE	1.7.1942	Gothenburg
4:06.2	Arne Andersson	SWE	10.7.1942	Stockholm
4:04.6	Gunder Hagg	SWE	4.9.1942	Stockholm
4:02.6	Arne Andersson	SWE	1.7.1943	Gothenburg
4:01.6	Arne Andersson	SWE	18.7.1944	Malmo
4:01.4	Gunder Hagg	SWE	17.7.1945	Malmo
3:59.4	Roger Bannister	GBR	6.5.1954	Oxford
3.58.0	John Landy	AUS	21.6.1954	Turku, Finland
3:57.2	Derek Ibbotson	GBR	19.7.1957	London
3:54.5	Herb Elliott	AUS	6.8.1958	Dublin
3:54.4	Peter Snell	NZL	27.1.1962	Wanganui
3:54.1	Peter Snell	NZL	17.11.1964	Auckland
3:53.6	Michel Jazy	FRA	9.6.1965	Rennes
3:51.3	Jim Ryun	USA	17.7.1966	Berkeley, Calif.
3:51.1	Jim Ryun	USA	23.6.1967	Bakersfield, Calif.
3:51.0	Filbert Bayi	TAN	17.5.1975	Kingston, Jamaica
3:49.4	John Walker	NZL	12.8.1975	Gothenburg
3:49.0	Seb Coe	GBR	17.7.1979	Oslo
3:46.31	Steve Cram	GBR	27.7.1985	Oslo
3:44.39	Noureddine Morceli	ALG	5.9.1993	Rieti

Tabla 1.2 Record mundial por millas

2.5: ¿Qué información es dada en la tabla anterior? ¿Es posible construir un modelo lineal de relación entre la fecha y el record mundial? Si es esto posible, entonces construya este modelo.

2.6: Dé una estimación fundamentada en el tiempo del récord mundial en 2010, 2020 y 2030.

3 Marta y Marius

Martha y Marius están en el grado 6to del colegio. A Martha le encanta leer. Cerca de su pupitre hay 5 libros que ella a recolectado de la biblioteca. Cada semana ella devuelve 4 libros y toma prestados otros 4 más.

3.1: **Dibuje un gráfico que muestre el desarrollo del número de libros qué Marta recolecta en un periodo de 10 semanas, y el gráfico del número de libros leídos por Marta en 8 semanas.**

Martha y Marius quieren ver un partido de la liga europea de balonmano. Ellos discuten sobre si compran o rentan un televisor. Para resolver el problema ellos deciden construir un modelo matemático.

3.2: ¿Qué elementos cree usted que deben tener en cuenta para este modelo? Intente construir un modelo que sirva para ayudar a decidir a Martha y Marius en compran o rentar un televisor.

Mientras Martha trabaja fuerte y meticulosamente en su trabajo, Marius es al contrario un poco flojo. En promedio, Martha y Marius reciven 2 asignaciones nuevas cada semana. Y, en promedio, Marius entrega 2 en cada otra semana. El lapso del año escolar está por encima de las 40 semanas y de aquí cada asignación tiene que ser enregada.

3.3: Construya un modelo que describa la entrega de asignaciones de Marius. ¿Cuántos asignaciones restan a Marius después de la 10ª semana? 20va semana? 40va semana?

En la pausa de invierno, Martha y Marius trabajan en el Hotel de deportes de invierno en Suecia. El director del Hotel Mats Matte se ha enterado de que Martha y Marius tienen conociemiento sobre modelamiento matemático. El les pregunta si pueden construir un modelo que pueda ilustrar claramente y calcular la cantidad de huéspedes que se hospedan en el hotel en el tiempo específico de alta temporada de 14 dias. Mats les informa que, al comienzo del periodo,220 en el hotel se hospedadon 220 huéspedes. Los primeros 4 dias se marcharon 40 huéspedes cada día y 10 nuevos huéspedes llegaron. A partir del 5o día se marcharon 20 cada día. En el 5to y 6to día llegaron 30 huéspedes nuevos, y apartir del 7º día llegaron 50 huéspedes cada día.

3.4: **Dé a Martha y Marius un ejemplo de cómo pueden ellos construir un modelo matemático de cuántos huéspedes se hospedaron en el hotel en un periodo de 14 días.**

Cuando situaciones como la anterior son analizadas usando un modelo matemático, hay entonces varias posibilidades pueden ser construidas. Un modelo puede ser construido como

- Descripción Verbal
- Una ecuación
- Un gráfico
- Una tabla

3.5: Para cada una de las formas de representación anteriormente mencionadas, Discuta los beneficios y las desventajas y provee ejemplos de aplicaciones de formas diferentes de representación.

4 Crecimiento de la Población

Para asignar fondos a los militares, al transporte, a las escuelas, a los sectores de la salud etc., es importante para que los funcionarios y los responsables políticos tengan conocimiento del tamaño de la población en un país.

El interés en el desarrollo del tamaño de la población comenzó durante el siglo XVIII. En aquel momento el principal interés fue dirigido en el radio entre un tamaño de la población y el consumo de recursos naturales. En 1798, el economista británico Thomas R. Malthus (1766-1834), publicó el libro un *ensayo en el principio en la población,* en el que él representó un modelo matemático para el crecimiento de una población. El modelo de Malthus puede dar una descripción simbólica en términos de esta fórmula:

$$\boxed{P_t = P_o \cdot (1 + r)^t}$$

Acá P_t es el tamaño de la población en el tiempo t, P_o es la población inicial, r es el rango de crecimiento anual (e.g. si el crecimiento anual de la población es de 1.5% el rdio de crecimiento ha de ser de r=0.015), y t es el número de años después del tiempo de inicio.

4.1: El libro de Modelamiento matemático en el curriculo de escuelas de secundaria es un libro de estudio Americano sobre modelamiento matemático y contiene asignaciones en el cual se informa que la Población de E.E.U.U en el año de 1950 fue de 150.697.000 luego la población de E.E.U.U en el año de 1980 y 2000 tiene que ser calculado según el modelo de Malthus asumiendo que el crecimiento de la población anual es de 2%. Resuelva esta labor.

4.2: Según la Oficina de Censos de los E.E.U.U., la división de la población la población de los E.E.U.U. en el principio de 2000 era de 274.338.367. Compare esto con los resultados a del punto 4.1 arriba. ¿Cuál podría ser la razón de la discrepancia, y hay alguna manera de mejorar cómo determinar el tamaño de la población en el año 2000?

5 Crecimiento de la población en Inglaterra y en Gales

Cuando el crecimiento de la población es analizada por un modelos matemáticos abrán genneralmente trés métodos matemáticos que puedan acercarce al tema en el momento: *Numércl, gráfico* y *simbólico*.

El método numércio es típicamente aplicado cuando se tienen datos como en la siguiente tabla. Esta tabla muestra el tamaño de la población en Inglaterra y en Gales en el periodo entre 1801 y 1911:

Año	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911
Millones.	8.89	10.16	12.00	13.9	15.91	17.93	20.07	22.71	25.97	29.00	32.53	36.07

Un método símple para aplicar en esta tabla sería el de determinar la diferencia o el cociente entre las dos columnas.

Si la *diferencia* entre las dos columnas es constante, entonces el crecimiento de la población es *lineal*.

Si el cociente entre las dos columnas es constante, entonces el crecimiento de la población es exponencial.

5.1: **Determine si el crecimiento de la población en Inglaterra y en Gales entre 1801 y 1911 es lineal o exponencial.**

Los métodos gráficos pueden hacernos entender la relación entre dos cantidades y nos ayuda tambien en expresar y explicar esta relación. Un gráfico provee una descripción de cómo el tamaño de la población incrementa y tambien leer el tamaño en un año determinado.

5.2: Dibuje el gráfico del tamaño de la de la población en Inglaterra y en Gales en el periodo entre 1801 – 1911.

Finalmente tenemos el método simbólico. Aquí arreglamos las expresiones matemáticas, las fórmulas, en las cuales los símbolos representan las cantidades que aparecen en el modelo. Un ejemplo del uso de un método simbólico es la fórmula de Malthus para el tamaño de la población. La expresión matemática se puede utilizar para calcular el tamaño de la población en un momento dado, o para calcular cuánto cambia el tamaño de la población durante un período dado.

5.3: Construya una expresión matemática que describa la relación entre el tamaño de la población en Inglaterra y en Gales durante el período a partir de 1801 a 1911.

Puesto que cada método proporciona una perspectiva única en una situación, los modelos matemáticos implican normalmente los tres métodos. Los tres métodos se deben también complementar y las razones deben ser dadas para explicar el cómo se construye y se aplica el modelo
Heche una ojeada la fórmula que Malthus presentó en 1798 (en el ejercicio 4 anterior). Usted puede ver que él pensaba que la población crecía exponencialmente. En su libro él escribió que la población crece exponencial mientras que la fuente de recursos naturales crece linear. Según Malthus esto plantea un grave problema: él pensó que la población mundial crecía tan rápidamente que después de un siglo la escasez de recursos naturales daría lugar al hambre.

En base a su modelo, Malthus recomendó que el índice de natalidad debía ser reducido retrasando el matrimonio. Malthus temió, sin embargo, que tal iniciativa daría lugar a la deterioración de la moralidad porque llevaría a un sexo prematrimonial.

Como ahora sabemos, Malthus no estaba exactamente en lo correcto. Pero aunque su teoría era incorrecta, él dirigió nuestra atención en el hecho de que el crecimiento de la población y el crecimiento de los recursos naturales pueden ser descritos por medio matemáticos

5.4: Considere porqué Malthus pensó que la población crece exponencial mientras que la fuente de recursos naturales crece linear. Describa los factores que afectan al crecimiento demográfico, y describa los factores que afectan al crecimiento de la fuente de recursos naturales. Utilice estas consideraciones para sugerir a qué clase de crecimiento nos estamos ocupando cuando hablamos del crecimiento de la fuente de recursos naturales.

6 Degradación del Alcohol

Puede ser una gran ventaja el saber la cantidad de contenido de alcohol en la sangre en un momento dado después de la consumación del alcohol. Con este fin, el químico sueco Widmark desarrolló un modelo matemático para el contenido de alcohol en la sangre (medición de alcohol por milla en la sangre)
Puesto que el alcohol es soluble en el agua, puede ser distribuido solamente en el agua del cuerpo. Por lo tanto, si uno quiere calcular el contenido de alcohol en la sangre, uno debe primero comprobar cuánta masa del cuerpo de una persona tiene agua. Widmark desarrolló un llamado factor de reducción r, con el cuál se puede calcular cuánta agua contiene el cuerpo. Este factor es específico del género:

$$r_{Male} = 0{,}3161 - 0{,}0048 \cdot v + 0{,}0046 \cdot h$$
$$r_{Female} = 0{,}3122 - 0{,}0064 \cdot v + 0{,}0045 \cdot h$$

Aquí v es el peso de la persona en kg, y h es la estatura de la persona en cm.

6.1: Utilizando la formula enterior, calcule el factor de reducción.

Widmark pensó que si es el factor de la reducción de una persona es conocida, sería posible calcular el contenido de alcohol en la sangre de esa persona con esta fórmula

$$\boxed{C_t = \frac{n \cdot D}{r \cdot w} - \beta \cdot t}$$

Aquí

C_t: Contenido de alcohol en la sangre (medido en gramos de alcohol por litro de sangre) en el momento t.

n : La cantidad en unidades estandares de alcohol absorvido de una persona.

D : La cantidad en unidades estandares de la cantidad de Alcohol en gramos (una unidad estandard contiene 12 gramos de alcohol).

r : El factor de reducción de una persona.

w : El peso de una persona en kilos.

β : radio metabólico en gramos por litro por hora (para hombres: 0.18; Para mujeres: 0.15).

t : El tiempo en horas.

6.2: Dibuje el gráfico que describa el desarrollo del contenido de alcohol en su sangre si consumiera 3,5 y 8 unidades de alcohol. ¿Cuál es el contenido de alcohol en su sangre despues de los tres casos despues de 4,6 y 8 horas?

(Continúa en la siguiente página)

6.2 (...continuación)

6.3: Malthe pesa 80 kilos y mide 178 cm. Hoy la policia le han detenido y le han pedido tomar una prueba con un alcohometro. La medida de alcohol en su sangre fue de 0.93. Malthe les ha explicado que el ha bebido la última bebida hace 3 horas. ¿Cuántas unidades de alcohol bebió Malthe hace 3 horas si él está diciendo la verdad?

7 Medicina en la sangre

Cuando ingerimos medicina esta gradualmente se deshace en el cuerpo. Para describir este proceso, usamos un modelo en el que se asume que en un tiempo dado un porcentaje de medicina se deshace y perdiendo el efecto. Por ejemplo, se ha comprobado que cuando una persona ingiere aspirina, la mitad de esta perderá efecto en 30 minutos.

7.1: Asuma que usted tomäo 750 mg de aspirina.

(a) ¿Qué cantidad de aspirina tendrá su sangre pasadas 4 horas?

(b) Construya un modelo simbólico que pueda ser usado para calcular la cantidad de aspirina en la sangre en un tiempo determinado.

7.2: Dibuje un gráfico que describa la relación entre la cantidad de aspirina en el cuerpo y el tiempo.

A menudo mucha gente toma medicina. Asuma que usted tomó 200mg de aspirina cada 4 horas.

7.3: ¿Cuál es el efécto a largo plazo (ej. En un periodo mayor a 4 días) de esta ingestión regular? p.Ej. Contruya una tabla y dibuje un gráfico que describa la relación entre el tiempo y la cantidad de aspirina en su sangre.

7.4: Observe el gráfico que dibujó en el ejercicio anterior. ¿Qué tipo de desarrollo piensa usted que estamos tratando aquí? Compare éste con el que ya conoconoce sobre la degradación del alcohol en el cuerpo. ¿Cree usted que el efecto del alcohol y de la medicina se pierde de forma diferente?

8 Células de levadura

Para hacer vino, Se utiliza un proceso de fermentación. Cuando se exprimen las uvas, células de levadura en la superficie de las uvas son mescladas con el zumo producido por las uvas. En el proceso de fermentación las células de levadura convierten el azucar en alcohol (Etanol) y dióxido de carbono.

Para la fermentación de las células de levadura pasan diferentes fases. En cada fase el desarrollo para la cantidad de células de levadura es diferente.

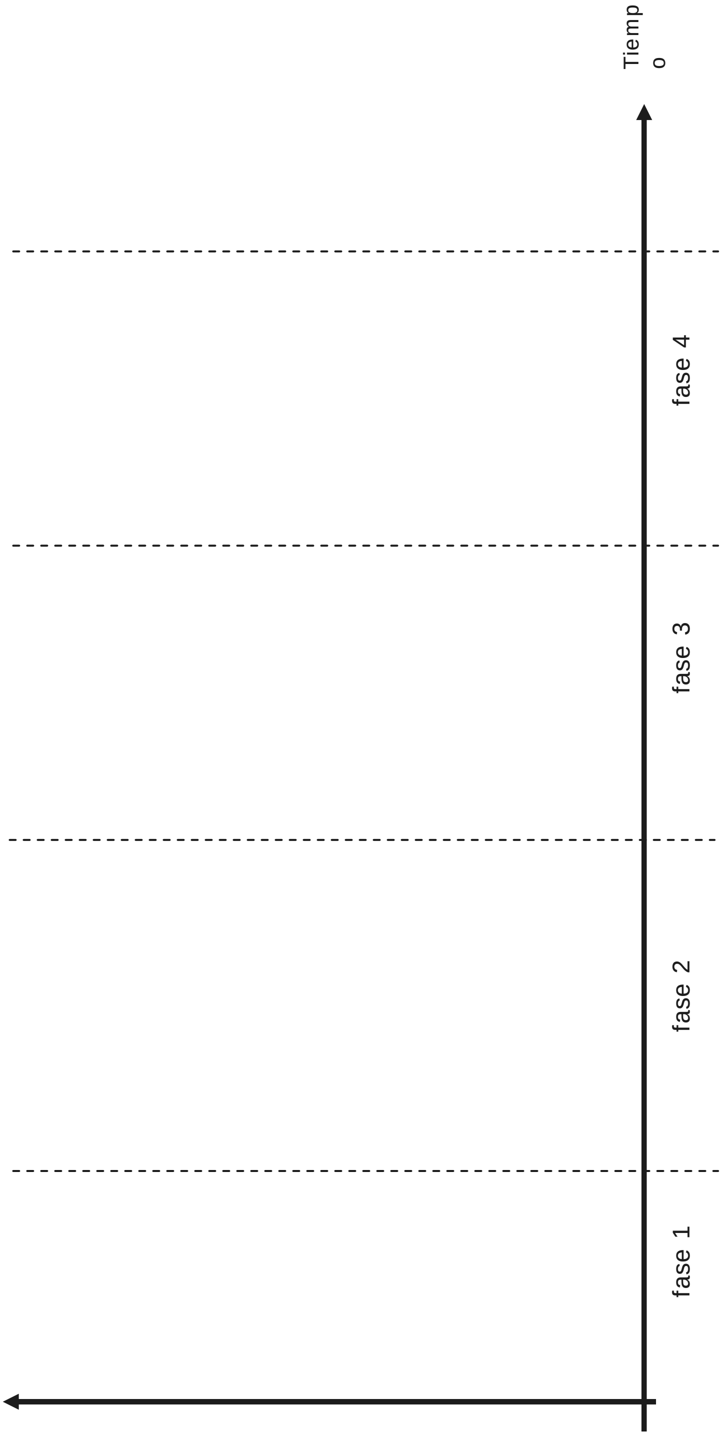
La fase inicial: En ésta fase las células se tienen que adaptar a su nuevo medio. En ésta fase casi ninguna celula se divide. Cuando las células se han adaptado completamente a su nuevo medio entonces van a una seunda fase..

La fase exponencial: En la segunda fase las células de levadura se dividen constantemente. En un momento las células se han dividido tantas veces que la concentración de azucar no puede soportar tantas células de levadura. En este momento las células de levadura entran a su tercera fase.

La fase estacionaria: En ésta fase el número de células de levadura muertas es casi igual al número de división de las células. En todas estas fases las células vivas de levadura han convertido el azucar en alcohol (etanol) y dióxido de carbono, pero el alcohol es un veneno para las células de levadura y en un tiempo se ha producido tanto alcohol que las células no pueden sobrevivir.

La fase de muerte: En ésta última fase las células de levadura empiezan gradualmente a morir . aquí mueren más células que la division de éstas.

8.1: Dibuje un gráfico que describa el crecimiento de las células de levadura en sus diferentes fases.



8.2: **La concentración de alcohol depende de la cantidad de células de levadura. Entre más células de levadura, más alcohol es convertido. Cada célula de levadura convierte una cantidad fija de azúcar a alcohol y a dióxido de carbono. En el ejercicio anterior usted dibujó un gráfico que describe el crecimiento de las células de levadura en las diversas fases. Utilice esta descripción para considerar cómo la concentración del alcohol se desarrolla en un cierto plazo. Dibuje un gráfico que describa cómo la concentración del alcohol crece en el proceso de fermentación.**

En la siguiente página podrá ver los resultados de un experimento en el que la concentración de alcohol en el proceso de fermentación ha sido medido frecuentemente.

Horas	5	10	15	20	25	30	35	40	60	80	100	120	140	200	250
Alcohol %	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	1,6	4,0	6,5	9,3	11,1	12	12,5	12,5

Source: *http://w2.ef.dk/netbog/Htxopg/kap32.htm*

8.3: (a) Compare estos resultados con el gráfico que usted dibujó anteriormente. ¿Encajan los datos con estos datos numéricos?

(b) Observe los resultados de las primeras 40 horas del experimento. Compruebe si el crecimiento del porcentaje de alcohol durante 5 a 40 horas es exponencial o lineal.

El creciminto del porcentaje de alcohol coresponde al tipo de crecimiento llamado crecimiento logístico.

8.4: Utilice su conocimientos sobre el crecimiento del porcentaje de alcohol para describir lo que caracteriza a un crecimiento logístico.

8.5: Muchas cosas crecen logísticamente. Encuentre algunos ejemplos de cosas u objetos que crezcan logísticamente. Describa qué factores pueden ser responsables para que estos objetos crezcan logísticamente.

9 Mosquito Tsetse

La tribu africana de Hilus se gana la vida criando ganado. Los ingresos de la tribu depende de cuánto puede ser vendido el ganado cada año. Entre más grande sea la manada de ganado de la tribu, la mayor es el ingreso de la tribu. Dado a que en el area donde el cesped crece llueve raramente , la tribu ha construido un pozo y un sistema de irrigación. Satisfechos observan que el cesped se vuelven cada vez más fértil mientras que se irriga. Además, observan que el tamaño de la manada crece gracias al pasto que son más fértiles. La tribu ahora ha aprendido que hay una relación entre la fertilidad del cesped y el tamaño de la manada: Entre menos cesped haya más pequeña es la manada.

Por lo tanto, la tribu elige irrigar el pasto con más frecuencia. Pero la irrigación repetida tiene un efecto secundario desagradable: la cantidad de mosquitos tsetse comienza a crecer muy rápidamente. Cuanto más húmedo es el pasto, mayor es el crecimiento de crias del mosquito tsetse. Y puesto que los mosquitos tsetse pueden infectar el ganado con la una enfermedad fatal en el que el ganado duerme, la tribu se ha preocupado de que el ganado está disminuya.

9.1: Intente bosquear las relación mencionadas de tal forma que con una sola ojeada nos proporcione una descripción de los factores más importantes.

10 Conclusión del tema ‘crecimiento’.

Escriba un resumen corto de sus actividades que tengan conexión a este tema. El resumen debe terminar con una conclusión de lo que usted toma que han de ser los resultados más importantes de su trabajo sobre este tema - es decir que propiedades matemáticas de diversos tipos de funciones de crecimiento encontró. Usted puede poner críticas así como preguntas con respecto el tema y al curso. Tambien podrá sugerir cambios etc.