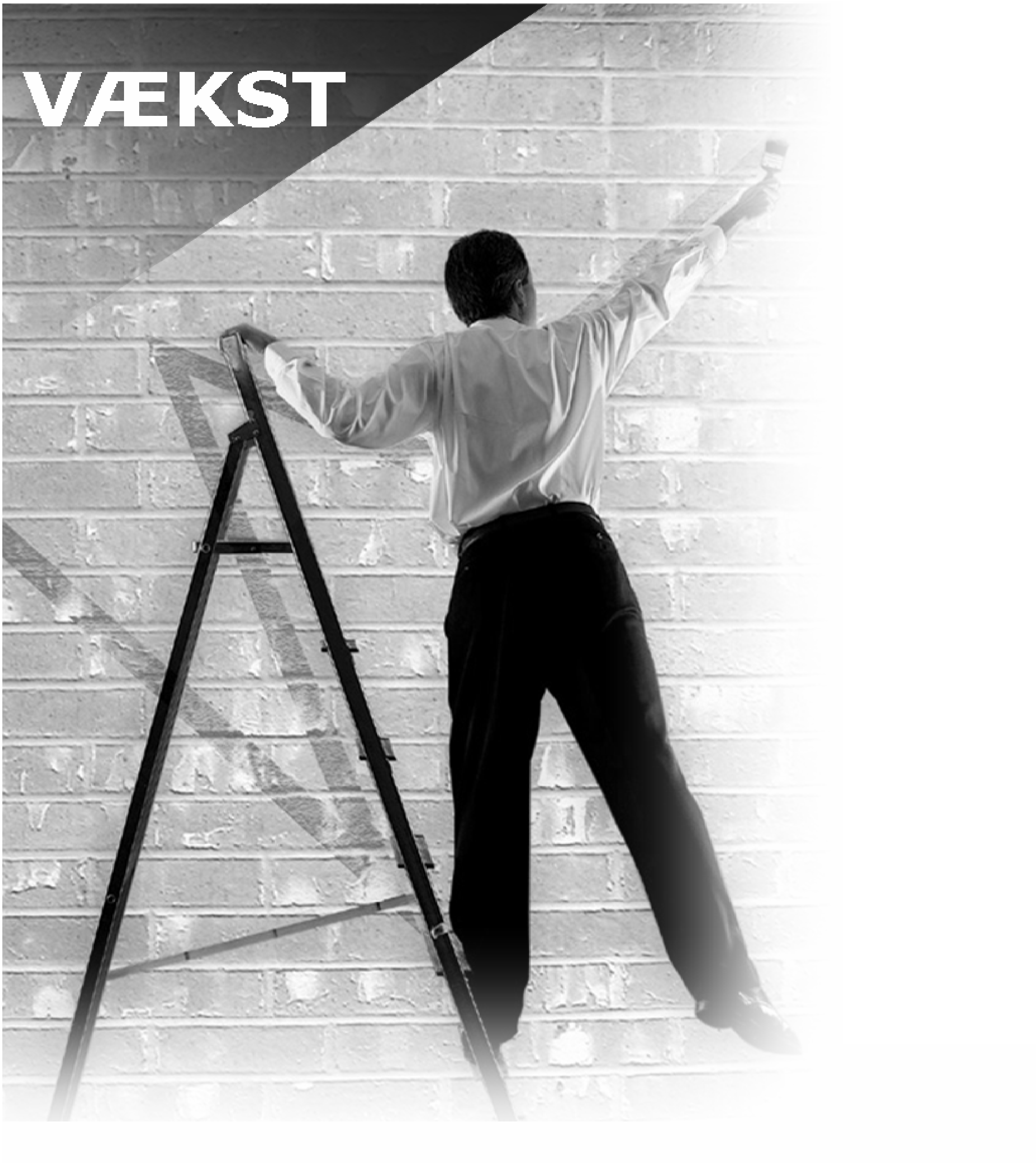
The **ScienceMath** Projekt: **Wachstumsprozesse**
Idee: Claus Michelsen,
Syddansk Universitet, Odense, Dänemark

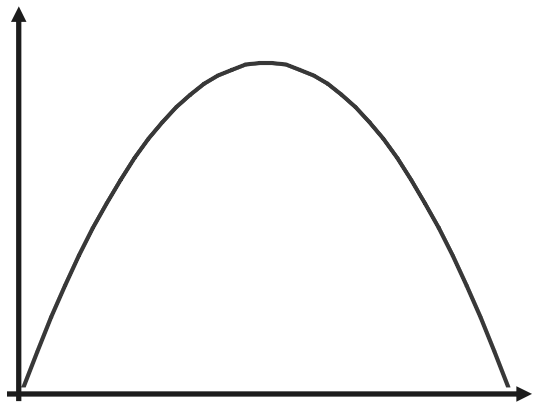
Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS



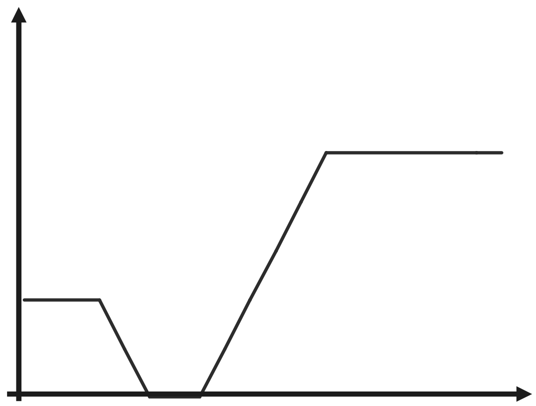
1 Graphen

Um Situationen des täglichen Lebens zu beschreiben, werden oft Graphen benutzt. In diesem Abschnitt betrachten wir ein paar Beispiele.

1.1. **Versuche eine Situation aus dem Alltag zu finden, zum der Graph unten passen würde. Beschreibe in deinen eigenen Worten, was in dieser Situation passiert. Vergiss nicht die Achsen zu beschriften.**



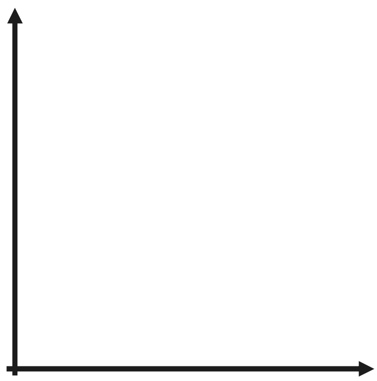
1.2. **Welche Situation aus dem Alltag könnte dieser Graph beschreiben? Beschreibe in deinen eigenen Worten, was in dieser Situation passiert. Vergiss nicht die Achsen zu beschriften.**



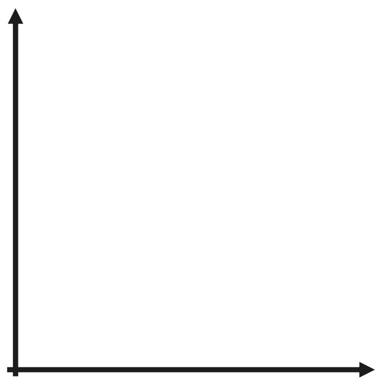
1.3. In jedem dem folgenden Fälle, sollst du zu den entsprechenden Situationen einen Graph skizzieren. Bevor du den Graphen zeichnest, mache dir klar, welche Größen du deinen Achsen zuordnest.

(a) Du drehst einen Wasserhahn mit heißem Wasser auf. Die Temperatur des laufenden Wassers hängt von der Zeit ab, seit der der Wasserhahn aufgedreht ist.

(b) Du lässt einen Plastikball aus einem Fenster im 2.Stock fallen. Der Abstand des Balls von der Straße, hängt von der Zeit ab, ab der du den Ball losgelassen hast.



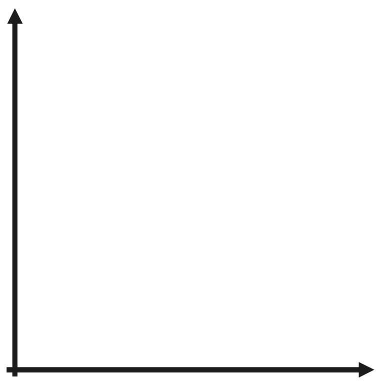
(a)



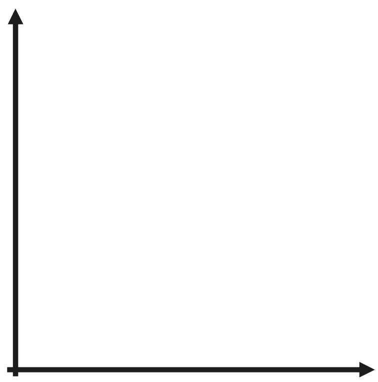
(b)

(c) Draußen ist strahlender Sonnenschein. Du kommst von draußen in einen dunklen Raum.
Der Durchmesser deiner Pupillen hängt davon ab, wie lange du dich schon im dunklen Raum befindest.

(d) Du zahlst einen großen Geldbetrag auf ein Sparkonto mit festem Zinssatz ein. Der Geldbetrag auf dem Konto, hängt von der Zeit ab, wie lange das Geld schon auf dem Konto ist.



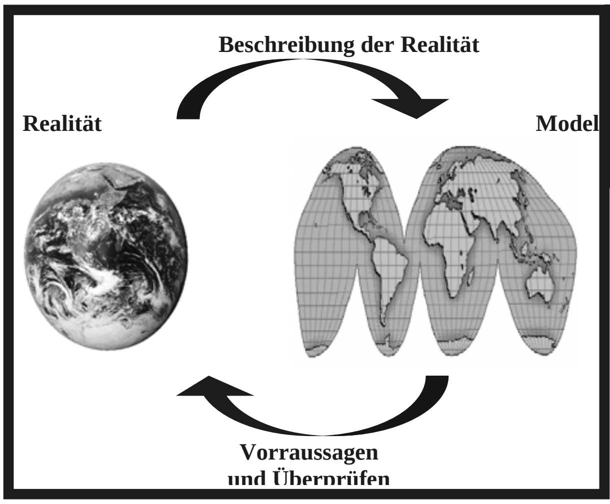
(c)



(d)

2. Mathematische Modelle

Ein wichtiger Grund Mathematik zu lernen, ist dass man durch die Mathematik Probleme des wirklichen Lebens lösen kann. Die Probleme, bei der die Mathematik angewendet werden soll, sind oft sehr komplex. Deswegen kann es notwendig sein, die Situation zu vereinfachen und zu idealisieren. Darum nennt man mathematische Beschreibungen von Problemen des wirklichen Lebens *mathematische Modelle* der Realität



Es gibt neben mathematischen Modellen auch andere Modelle. Eine Weltkarte ist auch ein Modell der

Das Erstellen und Anwenden eines mathematischen Modells ist normalerweise ein Prozess, in dem die einzelnen Schritte wiederholt werden müssen. Das erste Modell spiegelt Vorraussagen bezüglich des Problems wieder, die auf der Hand liegen. Diese Vorraussagen können durch die vorhandenen Werte überprüft werden. Diese Überprüfung wiederum kann zu Verbesserungen des Modells führen und damit zu neuen Vorraussagen, die wieder überprüft werden können. Das Wiederholen dieses Prozesses führt zu sehr genauen Vorraussagen von Situationen des wirklichen Lebens.

Das Erstellen eines mathematischen Modells umfasst oft eine der folgenden Beschreibungen.

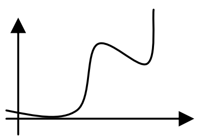
1 Man kann eine *numerische Darstellung* der Situation haben. Hier würde man normalerweise die Daten in einer Tabelle darstellen, die den Verlauf eines bestimmten Prozesses beschreibt.
2 Man kann eine *symbolische Darstellung* der Situation haben. Hier würde man normalerweise mathematische Symbole und Terme benutzen, um den Verlauf des Prozesses zu beschreiben
3 Man kann eine *graphische Darstellung* der Situation haben. Hier würde man die Situation durch einen Graphen in einem Koordinatensystem beschreiben.

Height	**160**	**171**	**172**
Weight	**66**	**68**	**75**

Numerische Darstellung

$$P = \alpha \cdot t + \beta$$

Symbolsche Darstellung



Graphische Darstelllung

Verbale Modelle

Bevor man von einer Situation ein mathematisches Modell erstellt, ist es gut die Situation in Worten zu beschreiben. Dadurch kann es leichter ersichtlich sein, wie das mathematische Modell erstellt werden kann. Deshalb fangen manche mathematischen Modelle mit einer *Daumenregel* an – einer einfachen verbalen Beschreibung einer Situation des wirklichen Lebens. Ein gutes Beispiel einer Daumenregel – oder eines verbalen Modells – ist

„Deine Größe im Alter von 2 Jahren ist die Hälfte deiner letztendlichen Größe als Erwachsener“

Hat man so ein verbales Modell erstellt, ist es möglich ein mathematisches Modell auf der Basis des verbalen Modells zu erstellen.

2.1 Gib Beispiele mathematischer Modelle. Woher kennst du diese Modelle und welchen Nutzen haben sie?
Benutze verbale Modelle und numerische, graphische und symbolische Methoden, um die Modelle zu veranschaulichen.

Hier ist eine Daumenregel:

> "Je tiefer ein Taucher taucht, desto mehr Druck von außen ist er ausgesetzt. Pro 10 Meter Tiefe, erhöht sich der Druck um 1 atm."

2.2 Nimm an, dass der Druck auf Meereshöhe 1 atm beträgt. Gib eine mathematische Beschreibung dieser oben beschriebenen Daumenregel an.

Mathematische Modelle, in denen die Beziehung zwischen den zwei Größen durch eine Gerade in einem Koordinatensystem beschrieben werden kann, nennt man *lineare Modelle*

2.3 Welche Methoden können angewendet werden, um zu bestimmen, dass die Beziehung zwischen zwei Größen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann?

2.4 Gib Beispiele linearer Modelle an. Woher kennst du diese Modelle und für was kann man sie gebrauchen?

Die Tabelle unten ist aus dem englischen Mathematikbuch *Mathematisches Modellieren* von J. Berry und K. Houston

Example 2 World Record for the Mile

Table 1.2 shows the world record for the mile in minutes and seconds between 1913 and 1986

Time	Name	Country	Date	Place
4:14.4	John Paul Jones	USA	31.5.1913	Cambridge, Mass.
4:12.6	Norman Taber	USA	16.7.1915	Cambridge, Mass.
4:10.4	Paavo Nurmi	FIN	23.8.1923	Stockholm
4:09.2	Jules Ladoumegue	FRA	4.10.1931	Paris
4:07.6	Jack Lovelock	NZL	15.7.1933	Princeton, N.J.
4:0.6.8	Glen Cunningham	USA	16.6.1934	Princeton, N.J.
4:0.6.4	Sydney Wooderson	GBR	28.8.1937	Motspur Park
4:06.2	Gunder Hagg	SWE	1.7.1942	Gothenburg
4:06.2	Arne Andersson	SWE	10.7.1942	Stockholm
4:04.6	Gunder Hagg	SWE	4.9.1942	Stockholm
4:02.6	Arne Andersson	SWE	1.7.1943	Gothenburg
4:01.6	Arne Andersson	SWE	18.7.1944	Malmo
4:01.4	Gunder Hagg	SWE	17.7.1945	Malmo
3:59.4	Roger Bannister	GBR	6.5.1954	Oxford
3.58.0	John Landy	AUS	21.6.1954	Turku, Finland
3:57.2	Derek Ibbotson	GBR	19.7.1957	London
3:54.5	Herb Elliott	AUS	6.8.1958	Dublin
3:54.4	Peter Snell	NZL	27.1.1962	Wanganui
3:54.1	Peter Snell	NZL	17.11.1964	Auckland
3:53.6	Michel Jazy	FRA	9.6.1965	Rennes
3:51.3	Jim Ryun	USA	17.7.1966	Berkeley, Calif.
3:51.1	Jim Ryun	USA	23.6.1967	Bakersfield, Calif.
3:51.0	Filbert Bayi	TAN	17.5.1975	Kingston, Jamaica
3:49.4	John Walker	NZL	12.8.1975	Gothenburg
3:49.0	Seb Coe	GBR	17.7.1979	Oslo
3:46.31	Steve Cram	GBR	27.7.1985	Oslo
3:44.39	Noureddine Morceli	ALG	5.9.1993	Rieti

Table 1.2 The world record for the mile

2.5 Welche Informationen liefert die obige Tabelle? Ist es möglich ein lineares Modell mit den Größen Datum und Weltrekord zu erstellen? Wenn ja, erstelle solches.

2.6 Gib eine gut fundierte Schätzung für die Weltrekordzeit für die Jahre 2010, 2020 und 2030 an.

3 Martha und Marius

Martha und Marius gehen beide in dieselbe Schule. Martha ist ein Bücherwurm. Neben ihrem Schreibtisch sind 5 Bücher von der Bücherei gestapelt. Jede Woche gibt sie 4 dieser Bücher an die Bücherei zurück und leiht sich zugleich 4 neue Bücher aus.

3.1 Zeichne einen Graphen, der die Bücheranzahl über einen Zeitraum von 10 Wochen angibt und lies aus dem Graphen heraus, wie hoch Marthas Bücherstapel nach 8 Wochen ist.

Martha und Marius wollen die Handballeuropameisterschaft im Fernsehen anschauen. Sie diskutieren, ob sie einen Fernseher kaufen oder leihen sollen. Um das Problem zu veranschaulichen, beschließen sie ein mathematisches Modell zu erstellen.

3.2 Welche Elemente müssen deiner Meinung nach in solch ein Modell enthalten sein? Versuche ein Modell zu erstellen, das Martha und Marius entscheiden hilft, ob sie einen Fernseher kaufen oder leihen sollen.

Während Martha peinlich genau ihre Hausaufgaben macht, ist Marius hingegen eher faul. Durchschnittlich bekommen sie pro Woche 2 neue Hausaufgaben auf. Und durchschnittlich reicht Marius alle zwei Wochen 2 Hausaufgaben ein. Das Schuljahr geht über 40 Wochen und am Ende müssen alle Hausaufgaben eingereicht sein.

3.3 Entwerfe ein Modell, das das Einreichen von Marius' Hausaufgaben beschreibt. Mit wie vielen Hausaufgaben ist Marius nach 10 Wochen im Rückstand? Nach 20 Wochen? Nach 40 Wochen?

In den Winterferien arbeiten Martha und Marius in einem Wintersporthotel in Schweden. Der Leiter des Hotels Mats Matte hat bemerkt, dass sich Martha und Marius mit mathematischen Modellen auskennen. Er fragt sie, ob sie ein Modell entwerfen können, das deutlich beschreibt und berechnet, wie viele Leute zu einer bestimmten Zeit innerhalb von 14 Tagen der Hauptsaison in diesem Hotel übernachten. Mats sagt, dass am Anfang der 14 Tagesperiode, das Hotel mit 220 Betten ausgebucht sei. In den ersten 4 Tagen verlassen pro Tag 40 Gäste das Hotel und 10 Gäste beziehen ein Zimmer. Ab dem fünften Tag verlassen täglich 20 Gäste das Hotel. Am fünften und sechsten Tag kommen 30 neue Gäste an und ab dem siebten Tag kommen pro Tag 50 neue Gäste an.

3.4 Gib Martha und Marius ein Beispiel an, wie sie ein mathematisches Modell erstellen können, das die Anzahl der übernachtenden Gäste in einer Zeitspanne von 14 Tagen beschreibt.

Wenn Situationen wie diese auf ein mathematisches Modell hin analysiert werden sollen, gibt es mehrere Möglichkeiten ein solches Modell zu erstellen. Ein Modell kann als

- verbale Beschreibung
- als Gleichung
- als Schaubild
- als Tabelle

erstellt werden.

3.5 Diskutiere für jedes der oben genannten Repräsentationsformen, die Vor- und Nachteile und gib Anwendungsbeispiele für die verschiedenen Repräsentationsformen.

4 Bevölkerungswachstum

Um die Gelder für das Militär, die Straßen, die Schulen, das Gesundheitssystem, usw. zu verteilen, ist es für die Behörden und die politischen Entscheidungsträger wichtig zu wissen, wie groß die Bevölkerung des Landes ist.

Das Interesse an der Entwicklung der Bevölkerungszahl begann während des 18. Jahrhunderts. Zu dieser Zeit war das Hauptaugenmerk das Verhältnis von Bevölkerungszahl und der Verbrauch an Nahrungsmitteln. 1798 veröffentlichte der englische Ökonom Thomas R. Malthus (1766-1834) das Buch „Essay on the principle on Population", in dem er ein mathematisches Modell für das Bevölkerungswachstum veröffentlichte. Malthus Modell kann in der symbolischen Darstellung durch die Formel

$$\boxed{P_t = P_o \cdot (1 + r)^t}$$

angegeben werden. Dabei ist P_t die Bevölkerungszahl zur Zeit t, P_o die Bevölkerungszahl am Anfang, r die jährliche Wachstumsrate (d.h. falls die Bevölkerung in einem Jahr um 1.5 % wächst, würde die Wachstumsrate r=0,015 sein) und t ist die Anzahl der Jahre nach Beginn der Beobachtung.

4.1 Das Buch *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum* ist ein amerikanisches Schulbuch über mathematische Modellierung und enthält eine Aufgabe, die angibt, dass die US Bevölkerung im Jahre 1950 bei 150.697.000 war und die US Bevölkerung im Jahre 1980 und 2000 berechnet werden soll, auf der Basis des Modell von Malthus, wobei man annimmt, dass die Bevölkerung jährlich um 2% wächst. Bestimme wie groß die US Bevölkerung im Jahre 1980 und 2000 war.

4.2 Nach dem statistischen Bundesamt der USA, hatten die USA zu Beginn des Jahres 2000 274.338.367 Einwohner. Vergleiche diese Zahl mit den Ergebnissen von Aufgabe 4.1 . Was könnte der Grund diese Abweichung sein? Gibt es eine Möglichkeit, das Modell zu verbessern um die Einwohnerzahl im Jahre 2000 zu bestimmen?

5 Bevölkerungswachstum in England und Wales

Die numerische Methode wird typischerweise dann angewandt, wenn wir Daten in einer Tabelle, wie jener unten finden. Diese Tabelle zeigt die Bevölkerungszahl in England und Wales zwischen 1801 und 1911:

Year	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911
Mio.	8.89	10.16	12.00	13.9	15.91	17.93	20.07	22.71	25.97	29.00	32.53	36.07

Eine ganz einfache Methode, wie man an so eine Tabelle rangeht, ist die Differenz oder den Quotienten zwischen den Werten zweier aufeinander folgenden Spalten zu bestimmen.

Falls die *Differenz* zwischen zwei aufeinander folgenden Spalten für jede Spalte konstant ist, dann ist das Bevölkerungswachstum *linear*.

Falls der *Quotient* zwischen zwei aufeinander folgenden Spalten für jede Spalte konstant ist, dann ist das Bevölkerungswachstum *exponentiell*

5.1 Entscheide, ob das Bevölkerungswachstum in England und Wales zwischen 1801 und 1911 linear oder exponentiell ist.

Graphische Methoden können helfen, um unser Verständnis über die Beziehung zwischen zwei Größen zu verbessern und erlauben uns diese Beziehung klar zu veranschaulichen. Ein Graph gibt uns einen Überblick, wie sich die Bevölkerungszahl vergrößert und es ist uns möglich die Einwohnerzahl eines gegebenen Jahres abzulesen.

5.2 Zeichne einen Graphen, der die Einwohnerzahl in England und Wales im Zeitraum von 1801-1911 angibt.

Schließlich haben wir noch die symbolische Methode. Hier bestimmen wir mathematische Terme, Formeln, deren Symbole die Größen in dem Modell angeben. Ein Beispiel der symbolischen Methode ist Malthus' Formel für die Bevölkerungszahl. Der mathematische Ausdruck kann verwendet werden, um die Bevölkerungszahl zu einer bestimmten Zeit zu bestimmen oder um zu bestimmen, wie sich die Bevölkerungszahl über einen gewissen Zeitraum ändert.

5.3 Erstelle einen mathematischen Ausdruck, der die Beziehung zwischen der Bevölkerungszahl in England und Wales und der Zeit im Zeitraum von 1801 bis 1911 beschreibt.

Da jede Methode eine spezifische Perspektive einer Situation angibt, beinhalten mathematische Modelle normalerweise alle drei Methoden. Die drei Methoden sollten durch Erklärungen und Begründungen ergänzt werden, warum dieses Modell erstellt und angewendet wird.

Schau dir die Formel, die Malthus 1798 vorstellte (Aufgabe 4). Du siehst, dass der dachte, die Bevölkerung würde exponentiell anwachsen. In seinem Buch schrieb er, dass die Bevölkerung exponentiell anwächst, die Nahrungsmittelproduktion dagegen linear. Nach Malthus stellt dies ein ernstes Problem dar: er dachte, dass die Bevölkerung so stark anwachse, dass nach einem Jahrhundert der Mangel an Nahrungsmittel in einer Hungersnot enden würde.

Auf der Basis dieses Modells schlug Malthus vor, dass die Geburtenrate gesenkt werden sollte, in dem die Ehen später geschlossen werden sollten. Malthus fürchtete jedoch, dass solch eine Initiative in einen moralischen Verfall enden würde, weil es zu mehr Sex vor der Ehe führen würde.

Wie wir wissen, hatte Malthus nicht ganz recht. Aber selbst wenn seine Theorie inkorrekt war, lenkte er unsere Aufmerksamkeit darauf, dass man das Bevölkerungswachstum und das Wachstum der Lebensmittelproduktion mit Hilfe der Mathematik beschreiben kann.

5.4 Untersuche, warum Malthus dachte, dass die Bevölkerung exponentiell wächst und die Lebensmittelproduktion linear. Bestimme Faktoren, die das Bevölkerungswachstum beeinflussen und bestimme Faktoren, die die Lebensmittelproduktion beeinflussen. Bestimme mit Hilfe dieser Betrachtungen die Art des Wachstums, wenn wir über das Wachstum der Lebensmittelproduktion reden.

6 Alkoholabbau

Es kann von großem Vorteil sein, zu einer gewissen Zeit den Alkoholgehalt im Blut zu bestimmen, nachdem man Alkohol zu sich genommen wird. Zu diesem Zweck hat der schwedische Chemiker Widmark ein mathematisches Modell entwickelt um den Promillegehalt im Blut zu bestimmen.

Da Alkohol wasserlöslich ist, kann er nur im körpereigenen Wasser verteilt sein. Deshalb muss jemand, der den Alkoholspiegel berechnen will, erst den Anteil der Körpermasse bestimmen, der aus Wasser besteht. Widmark entwickelte einen sogenannten Reduktionsfaktor *r*, mit dem man bestimmen kann, aus wie viel Wasser der Körper besteht. Dieser Faktor ist geschlechtsabhängig:

$$\boxed{\begin{aligned} r_{männlich} &= 0{,}3161 - 0{,}0048 \cdot v + 0{,}0046 \cdot h \\ r_{weiblich} &= 0{,}3122 - 0{,}0064 \cdot v + 0{,}0045 \cdot h \end{aligned}}$$

Hier steht *v* für das Körpergewicht der Person in kg und *h* steht für die Höhe der Person in cm.

6.1 Bestimme mit Hilfe der obigen Formel deinen Reduktionsfaktor.

Widmark dachte, dass man mit Kenntnis des Reduktionsfaktors, den Alkoholspiegel im Blut mit folgender Formel ausrechnen kann.

$$\boxed{C_t = \frac{n \cdot D}{r \cdot w} - \beta \cdot t}$$

Dabei ist

C_t: der Alkoholspiegel im Blut (in Promille) zur Zeit t.

n : die Anzahl der Standardeinheiten, die eine Person getrunken hat.

D : die Alkoholmenge in Standardeinheiten in Gramm (eine Standardeinheit besteht aus 12g Alkohol)

r : der Reduktionsfaktor der Person.

w : das Gewicht der Person.

β : die Stoffwechselrate in Gramm pro Liter und Stunde (bei Männern: 0,18; bei Frauen: 0,15).

t : die Zeit in Stunden.

6.2 Zeichne einen Graphen, der die Entwicklung deines Alkoholspiegels im Blut beschreibt, falls du 3,5 und 8 Standardeinheiten Alkohol getrunken hast. Wie viel Alkohol hast du in jedem der drei Fälle nach 4,6 und 8 Stunden im Blut?

(auf nächster Seite fortsetzen)

(Fortsetzung Aufgabe 6.2)

6.3 **Malte wiegt 80 Kilogramm und ist 178cm groß. Heute hat ihn die Polizei angehalten und ihn aufgefordert ins Alkoholmessgerät zu blasen. Das Gerät hat bei ihm einen Alkoholspiegel im Blut von 0.93 gemessen. Malte erklärt, dass er seit 3 Stunden nichts mehr getrunken habe. Wie viele Standardeinheiten hat Malte vor drei Stunden getrunken, wenn er die Wahrheit sagt?**

7 Medikamente im Blut

Wenn wir Medikamente einnehmen, wird es im Körper stetig abgebaut. Um diesen Prozess zu beschreiben, benutzen wir ein Modell, welches davon ausgeht, dass über eine bestimmte Zeit ein bestimmter Prozentsatz des Arzneimittels abgebaut wird. Zum Beispiel hat man festgestellt, dass nach Einnahme einer Aspirintablette, die Hälfte des Wirkstoffes in 30 Minuten abgebaut wird.

7.1 Angenommen du nimmst 750 mg Aspirin.

(a) Wieviel Aspirin hast du nach 4 Stunden noch im Blut?

(b) Erstelle ein symbolisches Modell, mit dem man die Aspirinmenge im Blut zu einer bestimmten Zeit bestimmen kann.

7.2 Zeichne einen Graphen, der die Beziehung zwischen der Menge an Aspirin im Blut und der Zeit darstellt.

Viele Leute nehmen regelmäßig Medikamente ein. Nimm an, dass Du alle 4 Stunden 200mg Aspirin zu dir nimmst.

7.3 Wie sieht der Langzeiteffekt dieser regelmäßigen Einnahme über eine Zeit von 4 Tagen aus? D.h. erstelle eine Tabelle und zeichne einen Graphen, die die Beziehung zwischen Zeit und Menge an Aspirin im Blut beschreiben.

7.4 Betrachte den Graphen, den du in der letzten Aufgabe gezeichnet hast. Um welchen Wachstumsverlauf handelt es sich hier? Vergleiche diesen mit dem was du über den Alkoholabbau im Körper weißt. Werden Alkohol und Medikamente unterschiedlich abgebaut?

8 Hefezellen

Um Wein zu gewinnen, werden natürliche Gärungsprozesse ausgenutzt. Wenn die Trauben gepresst werden, vermischen sich Hefezellen auf der Schale mit dem Inneren der Traube. Im Gärungsprozess wandeln die Hefezellen den Fruchtzucker in Alkohol (Ethanol) und Kohlendioxid um.

Während der Gärung durchlaufen die Hefezellen unterschiedliche Phasen. In jeder Phase ist die Änderung der Anzahl der Hefezellen unterschiedlich.

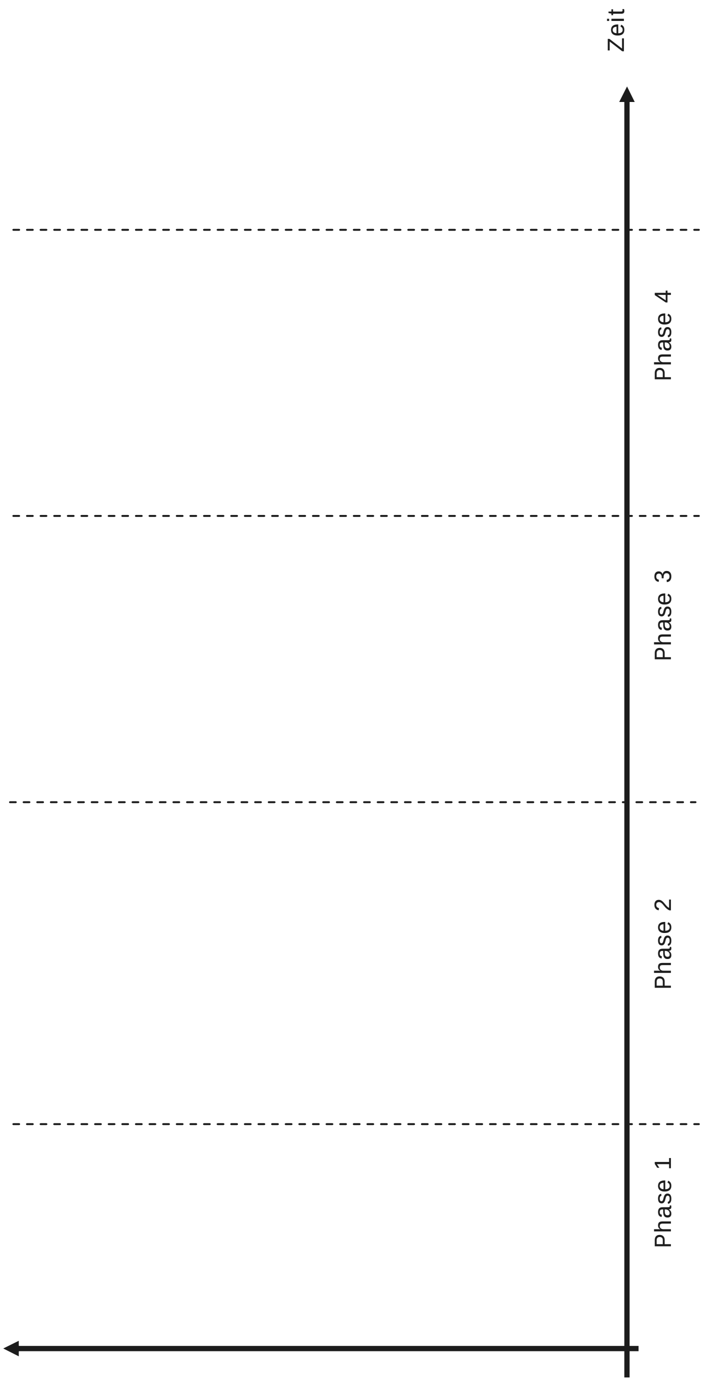
Die Anfangsphase: In der Anfangsphase müssen sich die Hefezellen an die neue Umgebung anpassen. In dieser Phase finden fast keine Zellteilungen statt. Wenn sich die Hefezellen an die neue Umgebung angepasst haben, gehen sie in die zweite Phase über.

Die exponentielle Phase: In der zweiten Phase teilen sich die Hefezellen mit einer konstanten Wachstumsrate. Irgendwann haben sich die Hefezellen so oft geteilt, dass die Zuckerkonzentration für so viele Zellen nicht mehr ausreicht. Zu diesem Zeitpunkt schreiten die Hefezellen in die dritte Phase.

Die stationäre Phase: In der dritten Phase ist die Anzahl der sterbenden Zellen gleich der Anzahl der Zellteilungen. In all diesen Phasen haben die lebenden Hefezellen Zucker in Alkohol (Ethanol) und Kohlendioxid umgewandelt. Aber Alkohol ist Gift für die Hefezellen und irgendwann hat sich so viel Alkohol gebildet, dass die Hefezellen dies nicht mehr überleben.

Die Todesphase: in dieser letzten Phase fangen die Hefezellen stetig an zu sterben. Hier sterben bei weitem mehr Hefezellen als dass Zellteilungen statt finden.

8.1 Zeichne einen Graphen, der das Wachstum der Hefezellen in den verschieden Phasen beschreibt.



8.2 Die Alkoholkonzentration hängt von der Anzahl der Hefezellen ab. Je mehr Hefezellen vorhanden sind, desto mehr Alkohol wird gebildet. Jede Hefezelle wandelt eine bestimmte Zuckermenge in Alkohol und Kohlendioxid um. In der letzten Aufgabe hast einen Graphen gezeichnet, der das Wachstum der Hefezellen über verschiedene Phasen hinweg beschreibt. Benutze diese Wachstumsbeschreibung um zu untersuchen, wie sich die Alkoholkonzentration über die Zeit hinweg entwickelt. Zeichne einen Graphen, der das Wachstum der Alkoholkonzentration während eines Gärungsprozesses beschreibt.

In der unteren Tabelle siehst du die Ergebnisse eines Experiments, bei dem die Alkoholkonzentration während eines Gärungsprozesses regelmäßig gemessen wurde.

Hours	5	10	15	20	25	30	35	40	60	80	100	120	140	200	250
Alcohol %	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	1,6	4,0	6,5	9,3	11,1	12	12,5	12,5

Quelle: *http://w2.ef.dk/netbog/Htxopg/kap32.htm*

8.3 (a) Vergleiche diese Ergebnisse mit dem Graphen, den du in der vorigen Aufgabe gezeichnet hast. Passt der Graph zu den Werten in der Tabelle?

(b) Betrachte die Ergebnisse der ersten 40 Stunden des Experiments. Untersuche, ob das Wachstum des Alkoholgehalts zwischen 5 und 40 Stunden exponentiell oder linear ist.

8.4 Nutze alles was du über das Wachstum des Alkoholgehalts weißt, um die Eigenschaften des logistischen Wachstums zu beschreiben.

8.5 Zahlreiche Dinge wachsen logistisch. Suche ein paar Beispiele logistischen Wachstums. Beschreibe, welche Faktoren dafür verantwortlich sein könnten.

9 Tsetse Fliegen

Der afrikanische Hilus Stamm verdient durch Viehhaltung sein Geld. Das Einkommen hängt von der jährlichen Anzahl des verkauften Viehs ab. Je größer die Herde des Stammes ist, desto größer ist ihr Einkommen. Da es auf den Weiden des Stammes selten regnet, hat der Stamm ein Brunnen- und Bewässerungssystem gebaut. Zufrieden können sie feststellen, dass die Weiden durch die Bewässerung immer weiter gedeihen. Ferner haben sie festgestellt, dass die Herdengröße bei immer weiter gedeihender Weide steigt. Der Stamm hat daraus gelernt, dass es eine Beziehung zwischen der Ergiebigkeit der Weiden und der Herdengröße gibt: Je weniger Grass auf der Weide wächst, desto kleiner ist die Herde.

Folglich beschließt der Stamm die Weiden häufiger zu bewässern. Aber die wiederholte Bewässerung hat einen unangenehmen Nebeneffekt: die Anzahl der gefürchteten Tsetse Fliegen fängt rasant an zu wachsen. Je feuchter die Weide ist, desto mehr Tsetse Fliegen werden gebrütet. Und da Tsetse Fliegen das Vieh mit der tödlichen Schlafkrankheit infizieren können, ist der Stamm in Sorge, dass die Herde kleiner wird.

9.1 Versuche die erwähnten Beziehungen so zu beschreiben, dass man auf einen Blick eine Übersicht über die wichtigsten Faktoren hat.

10 Fazit zum Thema “Wachstum”

Schreibe eine kurze Zusammenfassung über all die Dinge in Bezug auf dieses Thema. Die Zusammenfassung muss mit einem Fazit enden, in dem du die wichtigsten Dinge deiner Arbeit zu diesem Thema schreibst – d.h. welche mathematischen Eigenschaften hast du bei den verschiedenen Wachstumsformen herausgefunden. Du kannst ferner Kritik und Fragen zu diesem Thema und zu dieser Unterrichtssequenz äußern. Zu guter Letzt kannst du Veränderungswünsche vorschlagen usw.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.