Idea: Astrid Beckmann,
University of Education Schwaebisch Gmuend, Germany

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Hintergrund

Allgemeiner didaktischer Hintergrund

Ausgangspunkt ist ein fächerübergreifender Ansatz mit den Naturwissenschaften, insbesondere mit der Physik. Durch außermathematische Bezüge sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe naturwissenschaftlicher Kontexte und Methoden soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen werden, andererseits die Vielseitigkeit mathematischer Begriffe erfahren werden.

Naturwissenschaftliche Inhalte bieten die Chance für einen wirklichkeitsnahen Unterricht. Konkrete physikalische oder biologische Zusammenhänge können mathematische Modellierungsaktivitäten anregen und zu authentischen Erfahrungen führen. Mathematische Inhalte und Methoden werden in sinnvollen Zusammenhängen gelernt; die Realität der Schülerinnen und Schüler kann mit mathematischer Einsicht erweitert werden. Unterschiedliche Realitätsbezüge führen auf unterschiedliche Modelle und können somit auch zur Kontrastierung von begrifflichen Eigenschaften und von verschiedenen Modellen beitragen. Die Vielfalt naturwissenschaftlicher Phänomene gestattet offene Aufgabenstellungen und damit ein selbstständiges Erarbeiten der Mathematik. Mathematische Begriffe, wie zum Beispiel der Funktionsbegriff, können als Modellierungswerkzeuge erfahren werden. In unterschiedlichen Realitätsbezügen können ihre vielseitigen Bedeutungszusammenhänge und ihre unterschiedlichen Eigenschaften erfasst werden.

Mathematischer Hintergrund

Der Funktionsbegriff ist einer der wichtigsten, aber auch einer der schwierigsten mathematischen Begriffe. Viele Untersuchungen haben gezeigt, dass Schüler und Schülerinnen oft nur ein eingeschränktes Begriffsverständnis vom Funktionsbegriff haben. Unter einer Funktion wird oft nur „etwas mit x und y" oder etwas, das „man grafisch darstellen kann" verstanden. In einem Funktionsgraph wird eher der Verlauf der Linie als die funktionale Abhängigkeit zwischen zwei Größen erkannt. Tatsächlich besteht unterrichtlich auch die Gefahr, die Behandlung von Funktionen vorwiegend auf das Zeichnen von Graphen aus Gleichungen zu reduzieren. Der Funktionsbegriff ist aber viel komplexer: Den Funktionsbegriff kennen, heißt vertraut zu sein mit seinen inhaltlichen Vorstellungen, seinen verschiedenen Darstellungsebenen und einem Wechsel dazwischen. Die Komplexität des Funktionsbegriffs ist Gegenstand vieler Untersuchungen der letzten Jahrzehnte. Zentrale Arbeiten in diesem Zusammenhang stammen von DeMorois und Tall, Stoye und Fischer/ Malle und Swan, die unterschiedliche Repräsentationsformen, den Wechsel dazwischen und kognitive Ebenen identifizieren (vgl.Literaturliste unter Weitere Informationen).
Zusammenfassend werden hier drei inhaltliche Aspekte des Funktionsbegriffs unterschieden (vgl. in der Literaturliste: Beckmann 2006):

- Zuordnungsaspekt (Korrespondenz, Aktion: Jedem Element x einer Menge X wird genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet. Hier können wir im einfachen Fall nur ein Element x betrachten oder der Reihe nach/ kontinuierlich alle x aus X).

- Kovariationsaspekt (Prozess: Ändert sich x, so ändert sich entsprechend das zugeordnete bzw. korrespondierende y. Wir können x dabei jeweils diskret ändern oder kontinuierlich die Menge X durchlaufen lassen).
- Objektaspekt
  Eine Funktion als Objekt zu verstehen, heißt die Funktion als Ganzes zu begreifen, das heißt vertraut zu sein mit den Aspekten wie einfache und kontinuierliche Zuordnung, diskrete und kontinuierliche Kovariation in allen Repräsentationsformen, möglichen Wechseln und Wechselarten.

Darstellerische Aspekte sind Situationen (Bilder, verbale Beschreibungen), Tabelle, Graph, algebraischer Ausdruck/ Term.

Der Funktionsbegriff wird am umfassendsten im „Haus des funktionalen Denkens“ von Höfer erfasst (Abbildung 1). Es berücksichtigt und verdeutlicht alle Aspekte des Funktionsbegriffs und alle Möglichkeiten eines Wechsels. Dabei gestattet es auch die Differenzierung zwischen unterschiedlichen Möglichkeiten bei ein und derselben Übersetzung, beispielsweise ob die grafische Umsetzung eines Terms punktweise oder unter dynamischen Gesichtspunkten erfolgt (Abbildung 1).

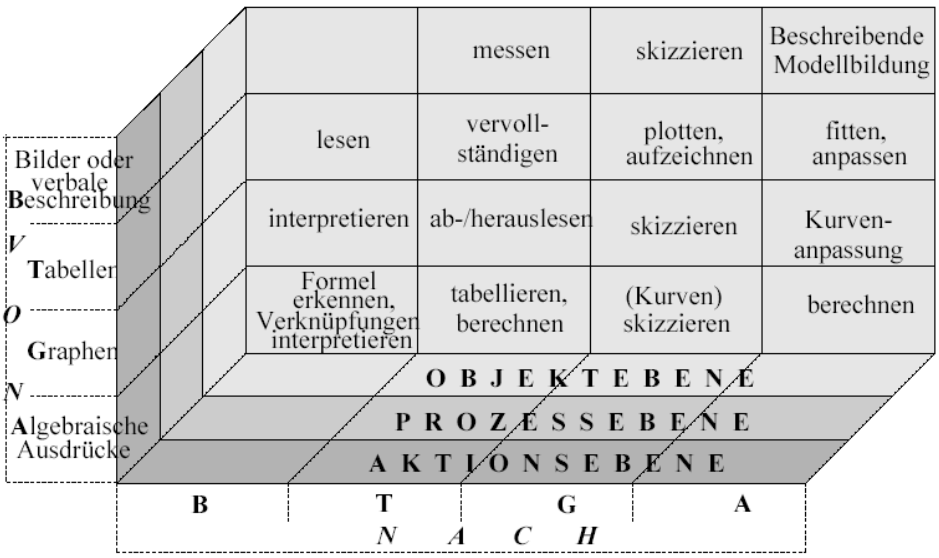

Abb. 1

Haus des funktionalen Denkens

(vgl. Literaturliste Höfer 2006)

Unterrichtsidee

Der Grundgedanke der hier vorgeschlagenen Sequenz ist es, Schüler und Schülerinnen aller Schulformen durch experimentelle Aktivitäten, Realitätsbezüge und naturwissenschaftliche Zusammenhänge beim Funktionsbegriffserwerb zu unterstützen. Experimente bieten sich an, da die experimentellen Schritte mit den Aspekten des Funktionsbegriffs korrespondieren. Beim Durchführen der Experimente werden die inhaltlichen Aspekte des Funktionsbegriffs handelnd erfahren und erlebt. Durch unterschiedliche Modellierungsaktivitäten werden verschiedene Darstellungsebenen und Wechsel dazwischen angeregt. Durch die Realitätsbezüge und die konkreten Größen des Experiments werden die oft vernachlässigten und wenig ausgebildeten Kompetenzen beim Wechsel zur verbalen Form bzw. zur Interpretation von Graphen angeregt (vgl. ausführliche Ausführungen in Beckmann 2006). Speziell besteht dadurch Gelegenheit, funktionale Zusammenhänge zu erkennen und zu diskutieren; der Aspekt der Kovariation kann authentisch erlebt und erfahren werden.

Die Anregung zu den experimentellen Aktivitäten erfolgt an verschiedenen Stationen. Durch einen realitätsorientierten Impuls werden die Schülerinnen und Schüler zunächst an ihre eigenen Alltagserfahrungen und an Anwendungssituationen erinnert und zur Diskussion über das Änderungsverhalten und zur Hypothesenbildung angeregt. Die Überprüfung der Hypothese motiviert das Experiment, das auf einen funktionalen Zusammenhang führt. Dieser in der Regel zunächst in einer Tabelle erfasste Zusammenhang wird weiter – etwa grafisch – untersucht. Dabei wird Wert auf die verbale Auseinandersetzung und den (mindestens abschließenden) Bezug zum Alltag gelegt. Hierfür haben sich Abschlusspräsentationen jeder Arbeitsgruppe im Klassenverband bewährt.

Damit der funktionale Zusammenhang nicht von vornherein klar ist und wirklich ermittelt werden muss, beschränken sich die Vorschläge nicht nur auf einen Funktionstyp (etwa lineare Funktion), sondern sprechen unterschiedliche funktionale Zusammenhänge an. Das Besondere der hier vorgeschlagenen Experimente ist darüber hinaus, dass der funktionale Zusammenhang nicht von Vornherein klar ist und sich zum Teil auch erst aus den experimentellen Gegebenheiten ergibt. Dies zwingt zu einer inhaltlichen Auseinandersetzung mit der funktionalen Beziehung. In leistungsstarken Gruppen kann versucht werden, jeweils den entsprechenden Funktionsterm zu finden, was allerdings nicht bei allen Beispielen einfach gelingt und ggf. auch nur durch Näherungs-/Fitverfahren geleistet werden kann. Entscheidender ist in allen Fällen aber auch die verbale und inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Änderungs- und Abhängigkeitsverhalten der betrachteten Größen.

Die bei „Unterrichtsmaterial“ vorgeschlagenen Experimente sind geeignet für Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe II (ggf. am Ende der Sekundarstufe I). Die Experimente erfordern von der Lehrkraft Kompetenzen und Kenntnisse in der experimentellen Physik. Die Schülerinnen und Schüler sollten mit dem physikalischen Hintergrund vertraut sein oder ihn während der experimentellen Arbeit erfahren. Die in der Sequenz zusammengestellten Experimente zielen ab auf eine verbale und inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Änderungs- und Abhängigkeitsverhalten der betrachteten Größen. Grundlage sind unterschiedliche Funktionen, wobei es sich nicht um einfache üblicherweise im Unterricht behandelte Funktionstypen handelt, sondern um eher unbekannte Funktionen bzw. funktionale Zusammenhänge, die sich erst in der konkreten Versuchsdurchführung ergeben. Die Experimente erfordern von der Lehrkraft Kenntnisse des physikalischen Hintergrunds und zum Teil Kompetenzen in der experimentellen Physik. Eine fächerübergreifende Behandlung, die neben dem mathematischen Interesse der funktionalen Abhängigkeit auch die physikalische Begrifflichkeit berücksichtigt, ist hier sehr erwünscht und zum Teil auch nötig. (Hinweis: In anderen Unterrichtsbeispielen werden Experimente mit einfacheren Inhalten vorgeschlagen).

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author(s), and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.