



Učno gradivo

Ideja za izvedbo pri pouku

Če dijaki ne poznajo primera „Reševalec iz vode“ (glej poglavje od ScienceMath-a z naslovom „Fermat sreča Pitagora“ istega avtorja), jim predstavimo temo s pomočjo učnega lista ali v obliki učiteljeve prezentacije. Če poznajo primer „Reševalec iz vode“, se lahko oblikujejo skupine. Dijaki naj uporabijo naslednji učni list z naslovom „Fermatovo načelo“. Vsaka skupina naj ima možnost uprizoritve poskusa. Lahko opazujejo hitrost svetlobe v različnih tekočinah.

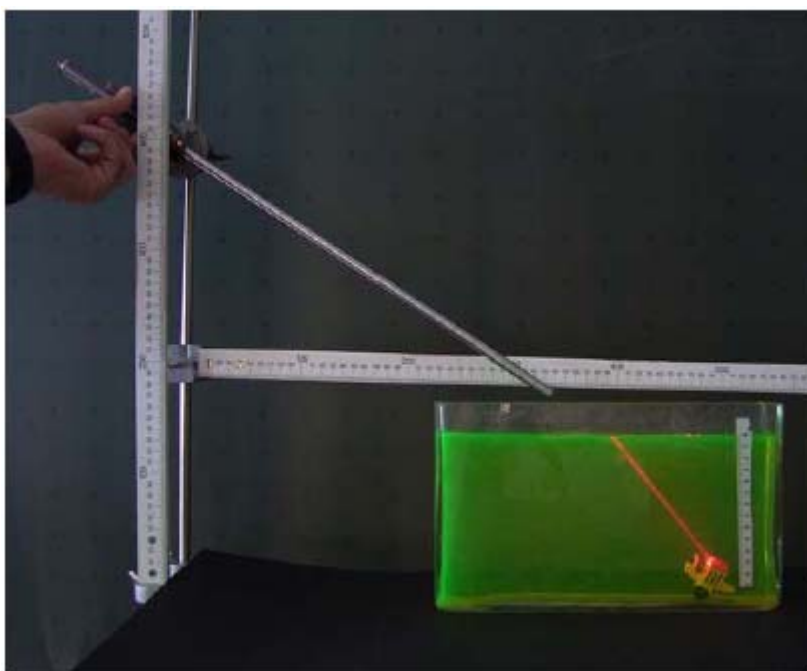
Potrebno gradivo

Vsaka skupina potrebuje (glej sliko na naslednji strani):
stekleno posodo (dolgo najmanj 40 cm in visoko najmanj 30 cm), vodo ali neko drugo prozorno tekočino, usmerjevalnik laserja, sladkovodnega polža ali kakšen manjši predmet, mizo in merilni trak.

Delovni listi

Fermatovo načelo

Svetloba potuje v različnih snoveh z različno hitrostjo. Hitrost svetlobe v zraku je okoli 300000 km/s. Skozi steklo pa potuje s hitrostjo okoli 200000 km/s. vselej se obnaša kot popolni reševalec iz vode. Svetloba vedno potuje po poti, za katero potrebuje najkrajši čas. To obnašanje svetlobe imenujemo Fermatovo načelo. Imenuje se po znanstveniku, ki ga je prvi formuliral.



Slika 1: polž v vodi

Naloge:

Polž, ki živi v sladki vodi, si želi nekaj svetlobe na svoji hišici. Zato usmerimo laserski žarek iz zraku točno v smeri polžje hišice (glej sliko 1).

- a) Predstavljajmo si na sliki 1 koordinatni sistem. Usmerjevalnik laserja je na točki $L(0, y_L)$, gladina vode leži na premici g z enačbo $y = b$, vrh polžje hišice leži na točki $P(x_P, y_P)$. Točka, kjer laserski žarek doseže vodno gladino, je $Q(x_Q, b)$ (vse merimo v centimetrih). Izmeri posamezne dolžine in označi Q , L , g in P v koordinatni sistem.
- b) Določi hitrost laserskega žarka v vodi, če veš, da je njegova hitrost v zraku okoli 300000 km/s.

možna rešitev b)

Označimo z a oddaljenost usmerjevalnika laserja od vodne gladine in naj bo $a = 26$. Oddaljenost polža od vodne gladine, ki jo označujemo z b , naj bo 11. Abscisa točke, kjer laserski žarek doseže vodno gladino, označimo z x , pri čemer naj bo $x = x_Q = 41$.

Velja:

$c - x = 50 - x_Q = 9$, pri čemer je c abscisa točke, kjer se nahaja polž.

Z v_1 označimo hitrost svetlobe v zraku. Vemo, da je hitrost svetlobe v zraku enaka okoli 300000 km/s, kar je enako 30000000000 cm/s.

V zraku velja, da je čas, ki ga potrebuje svetloba, da doseže vodno gladino, enak:

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$$

V vodi je čas, ki ga svetloba potrebuje, da doseže dno, enak:

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}, \text{ pri čemer z } v_2 \text{ označimo hitrost svetlobe v vodi.}$$

Velja torej, da je celotni čas, ki ga svetloba potrebuje, da doseže polžjo hišico, enak

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

Načeloma so znane vse količine, razen v_2 . Na začetku naj bi predpostavili, da poznamo v_2 , ne poznamo pa vrednosti x . V tem primeru bi torej morali izračunati absciso točke, kjer laserski žarek doseže vodno gladino. Zaradi Fermatovega načela, je vrednost x izbrana tako, da svetloba doseže polžjo hišico v najkrajšem možnem času. Veljati mora torej, da funkcija časa v odvisnosti od x ($t(x)$) doseže pri izbranem x najmanjšo vrednost. To pomeni, da velja:

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{v_1} \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-0.5} 2x + \frac{1}{v_2} \frac{1}{2} (b^2 + (c-x)^2)^{-0.5} 2(x-c) = \\ &= \frac{1}{v_1} (a^2 + x^2)^{-0.5} x + \frac{1}{v_2} (b^2 + (c-x)^2)^{-0.5} (x-c) = 0 \end{aligned}$$

Če poznamo x , lahko izračunamo v_2 (izrazimo ga iz zgornje enačbe in vstavimo poznane vrednosti):

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(c-x)(b^2 + (c-x)^2)^{-0.5}}{\frac{1}{v_1} x(a^2 + x^2)^{-0.5}} = \\ &= \frac{9 \cdot (11^2 + 9^2)^{-0.5}}{\frac{1}{30000000000} \cdot 41 \cdot (26^2 + 41^2)^{-0.5}} \approx 2,249 \cdot 10^{10} \\ \Rightarrow v_2 &= 2,25 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 225000 \text{ km/s} \end{aligned}$$