The **ScienceMath**-project: **Das Prinzip von Fermat**
Idee: Thilo Höfer,
Staufer Gymnasium Waiblingen, Deutschland

Unterrichtsmaterial

Unterrichtsvorschlag

Wenn das Rettungsschwimmer-Problem noch nicht bekannt ist (vgl. ScienceMath-Einheit „Fermat meets Pythagoras“ desselben Autors), dann sollte es entweder direkt anhand des zur Verfügung stehenden Arbeitsblattes (ebd. Worksheet WS 1) behandelt oder in anderer Form (z.B. als Lehrervortrag) eingeführt werden. Ist das Rettungsschwimmer-Problem bekannt, so findet der Unterricht mithilfe des folgenden Arbeitsblattes „Das Prinzip von Fermat“ In Schülergruppen statt. Dabei sollte für jede Schülergruppe ein Versuchsaufbau zur Verfügung stehen.
Als Abwandlung kann man den verschiedenen Gruppen auch verschiedene durchsichtige Flüssigkeiten (z.B. Öl, Spiritus, …) zur Untersuchung geben, um auch für diese Stoffe die Lichtgeschwindigkeiten zu bestimmen.

Benötigtes Material

Das Experiment wird für jede Schülergruppe einmal benötigt. Für den Versuchsaufbau sind notwendig (vgl. Abbildungen):
1 Glasgefäß (mindestens 40cm lang und 30cm hoch), Wasser oder andere durchsichtige Flüssigkeit, 1 Laserpointer, 1 „Schnecke“ oder vergleichbares Zubehör, Stativmaterial, Maßbänder

Arbeitsblatt

Das Prinzip von Fermat

Licht ist nicht überall gleich schnell. Zum Beispiel beträgt die Lichtgeschwindigkeit in Luft ca. 300000km/s. In Glas ist das Licht dagegen nur ungefähr 200 000km/s schnell. Außerdem verhält sich Licht immer wie ein perfekter Rettungsschwimmer, d.h. ein Lichtstrahl verläuft von einem Punkt A zu einem Punkt B stets auf dem zeitlich kürzesten Weg für das Licht. Dieses Verhalten von Licht nennt man das Prinzip von Fermat, benannt nach, der es erstmals formulierte.

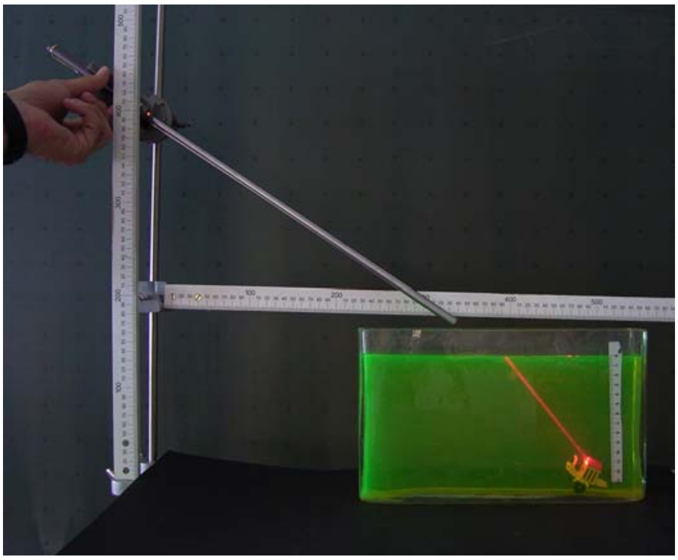

Abb.1 Die Schnecke im Wasser

Aufgaben:

Eine kleine Wasserschnecke möchte Licht in ihrem Haus haben. Dazu wird der Lichtstrahl eines Laserpointers außerhalb des Wassers so gerichtet, dass er genau in das Dach fällt (s. Abb. 1).

a.) Wenn man die Anordnung in Abb. 1 vermisst und in ein kartesisches Koordinatensystem überträgt, so erhält man den Laserpointer im Punkt $L(0/y_L)$, die Wasserlinie entlang der Geraden g mit der Gleichung y=b , sowie das Dach des Schneckenhauses im Punkt $S(x_S/y_S)$. Der Lichtstrahl des Laserpointers trifft im Punkt $Q(x_Q / b)$ ins Wasser (alle Angaben in Zentimeter!). Beschaffen Sie sich die fehlenden Größen aus der Versuchsanordnung und zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Q, L, g und S**.**

b.) Bestimmen Sie nun die Lichtgeschwindigkeit des Lichtstrahls im Wasser. Verwenden Sie dazu die oben genannte Lichtgeschwindigkeit in Luft.

Msterlösung b.)

z.B. a= 26 (Höhe Laserpointer von Wasserlinie aus) , b= 11 (Tiefe Dach zu Wasserlinie) , x = x_Q= 41 (Entfernung Laserpointer zu Eintauchpunkt entlang Wasserlinie),

c-x= 50-x_Q= 9

v_1= 300.000 km/s = 30.000.000.000 cm/s

Es gilt in Luft: t_1= sqrt (a^2 + x^2) / v_1

In Wasser t_2= sqrt (b^2 + $(c\text{-}x)^2$) / v_2

Also gesamt: $t(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}=\frac{1}{v_1}\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\cdot\sqrt{b^2+(c-x)^2}$

Im Prinzip ist alles bekannt außer v_2. Man gehe dennoch zunächst davon aus, dass x nicht vorgegeben wäre und v_2 bekannt sei. Man möchte also den Punkt berechnen, an dem der Strahl ins Wasser fallen muss. In dieser Funktion wird für die durch den Versuch festgelegten Konstanten (alles außer x) das x so gewählt, dass t minimal wird (Fermat´sches Prinzip). Somit wird das x gesucht, für das die Zeitfunktion t(x) einen Tiefpunkt hat, als muss x auf jeden Fall so gewählt werden, dass die Ableitung t´(x)= 0 ist.

$$\begin{aligned} t'(x)&=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-0,5}\cdot 2x+\frac{1}{v_2}\frac{1}{2}\cdot(b^2+(c-x)^2)^{-0,5}\cdot(2c-2x)\\ &=\frac{1}{v_1}\cdot x\cdot(a^2+x^2)^{-0,5}+\frac{1}{v_2}\cdot(c-x)\cdot(b^2+(c-x)^2)^{-0,5}\end{aligned}$$

Diesen Term muss man gleich 0 setzen.

$$0=\frac{1}{v_1}\cdot x\cdot(a^2+x^2)^{-0,5}+\frac{1}{v_2}\cdot(c-x)\cdot(b^2+(c-x)^2)^{-0,5}$$

Jetzt erst „dreht man den Spieß um“: Da x bekannt ist, weiß man ja, für welches x diese Ableitung den Wert 0 annimmt. Man kennt das zugehörige v_2 jedoch nicht. Deshalb wird man nun v_2 auflösen und alle anderen Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} v_2&=\frac{(c-x)\cdot(b^2+(c-x)^2)^{-0,5}}{\frac{1}{v_1}\cdot x\cdot(a^2+x^2)^{-0,5}}\\ &=\frac{9\cdot(11^2+9^2)^{-0,5}}{\frac{1}{30.000.000.000}\cdot 41\cdot(26^2+41^2)^{-0,5}}\\ &\approx 2,249\cdot 10^{10}\end{aligned}$$

=> 2,25 10^{10} cm/s = 2,25 10^8 m/s = 225.000 km/s

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.