Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Ders Materyali

Öneri

Fermat prensibine giriş

Koruma problemi, bir cankurtaranın sahilde bulunduğu yerden ve olayı gördüğü yöne bağlı, suda yardıma ihtiyacı olan kişiye giden en çabuk yolu bulmasidir. Sahil boyundan koşmak, yüzerek gitmekten daha hızlıdır, yani her zaman en çabuk yol direk suya girmek değildir. En hızlı yol direk boğulan kişiye gitmek değil, önce sahilde biraz daha uzun bir sure yürüyüp sonar yüzmektir. Fermat'ın prensibine göre ışık mükemmel bir cankurtarandır. Bu örneğin mantığına baktığımızda konuya giriş yapmak için uygun bir konu olduğunu görürüz. Ana yoğunluk herşeyden önce matematiksel küçültme probleminde yatıyor.
Dikkate almalısınız, çünkü bugüne dek çok az ekstrem değer problemi hakkında bilinmeyen analizlere odaklanılmıştır. Bu yüzden giriş çok dar kapsamda yapılmalıdır.Bu da öğrenciler tarafından belirlenmiş bir sürede cankurtaranın ihtiyaç duyduğu sürenin adım adım hesaplanması ile olabilir (çalışma kağıdı 1'e bakınız). Bunun ile muhtemellen Pythagoras'ın teorisi yeni bir içerik ile tekrar kullanılabilir. Sadece o zaman cankurtaranın görevi için ihtiyaç duyduğu süre belirlenir, esnek pozisyona dikkat edilir. Grafikdeki görev fonksiyonuna bakarken sonuç incelenir ve bu nedenle en düşük noktayı hesaplamak için bir gereksinim yaratılır.

İlk çalışan uçağın sonuçlarına bakılarak grup içersinde açıklanabilir.Eğer sınıf alışkınsa prosedüre öğrenciler bireysel olarak da çözümleri açıklayabilirler (çözüm için çalışma kağıdı 1'e bakınız). Bu durumda öğrenciler ön alıştırmanın sonuçlarını karşılaştırmalıldırlar veya konu ile sorunları varsa sonucun bir bölümünü alıp devam etmelidirler. Belirli çözümler sınıfın farklı yerlerine konulabilir böylelikle kontrol zorlaşır. Bu metod sonuca giden yolda öneriler yazmada zorlanan öğrencilere verilerek güncel çözüme bakmadan bir ayrım yaratabilir. Bu sonuçlarda tabi ki kaldırılmalıdır.
İkinci bölümde öğrencilere sonuca giden yolu izlemek için bir başka olanak sunulur. Özellikle ilk bölümü kendi başlarına çözemeyen öğrencilere şimdi çözümü adım adım anlamalarına rağmen, direk bir kontrol olanağı verilir. Böylelikle benzer bir alıştırmayı kendi başlarına çözebilirler. Fermat'ın prensibi öğrencilere 'Işlk hareketi mükemmel bir cankurtaran gibidir' olarak sunulur.Havadaki ışığın hızı eklenerek ve kaynağı havadaki ışık (lazer) olan su içinde bir deney tanımı alacaklar ve su altındaki objeler. Alıştırma objeye lazer ile dokunmayı hedefleyen noktanın hesaplanmasıdır (çalışma kağıdı 2'ye bakınız). Testin sonucunun geçerli olup olmadığını bulmak için bir deney yapılmalıdır (çözüm çalışma kağıdı 2'ye da bakınız).
İki çalışma kağıdının toplamı matematiksel ve fizisel olarak sınıfca tartışma takip etmeli: Daha sonar karşımıza çıkacak olan matematiğe bağlı olarak bu prosedür düzenli bir şekilde ekstrem değer problemlerinde bir nevi gelişim sağlmak için tekrar tarışılmalıdır. Fiziğe bağlı olarak bu hesaplama geneleştirilmelidir. Farklı yoğunluğu olan ışığın objelerle karşılaşıp ışıması dolaylı kırılmanın sonucu. Günlük hayatta suya bakdığımızdaki cereyan eden fenomeni açıklayabilir.
Yinede 'Geliş açısı ile yansıma açısı eşittir' yansıma özniteliğinin sonucunu tartışmak önemlidir.

Fikir: Thilo Höfer,
Staufer Gymnasium Waiblingen, Almanya

Gerekli materyal

Bu deney hesaplamaların kontrolü için sadece bu ünite içersinde gereklidir. Deney için gerekli material düzeneği (resme bakınız).

1 cam zarf (en az 40 cm uzun ve 30 cm yüksek), 1 lazer gösterge, 1 “kurt” veya karşılaştırılabilecek donanım, sehpa, ölçme bandı

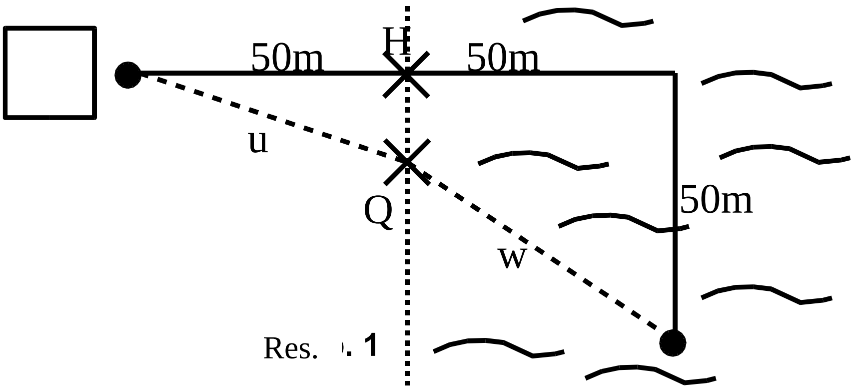
Çalışma kağıdı (kopyalamak için bir sonraki sayfaya bakınız)

Bu proje Avrupa Konseyi tarafından desteklenip finanse edilmiştir. Bu yayın sadece yazarın görüşlerini yansıtmaktadır ve Komisyon, yapılan alıntılar için hiç bir sorumluluğu kabul edemeyecektir.

ScienceMath-projesi: **Fermat Pythagoras ile karşılaşıyor**
Fikir: Thilo Höfer,
Staufer Gymnasium Waiblingen, Almanya

Çalışma kağıdı 1: Cankurtaran problemi

Cankurtaran Mitch kulesinin önündedir su içinde tehlikede bir kişi gördüğünde.Su'ya direk yol 50 m'dir.Yardıma ihtiyacı olan kişiye ulaşmak için ordan bir 50 m daha düz ve 50 m güneye bir mesafe var (resim 1). Mitch sahile çıkmak için 7m/s'ye ve suya çıkmak için sadece 2m/s'ye ihtiyacı olduğunu biliyor.Kişiye mümkün olan en hızlı şekilde ulaşmak için karadan Q noktasına düz koşmaya başlıyor ordanda direk kişinin yanına yüzüyor. Karadan u metre mesafesini ve su dan w metre mesafesini kaplıyor.



Res.). 1

a.) Eğer Mitch suya 50 m düz koşup (H noktası) sonra 71 m'lik mesafeyi kişiye doğru yüzse ne kadar süre alırdı?

b.) Kişinin yanına düz yüzebileceği bir noktaya koşabilirdi.Bu da 71 m karadan ve 50 m su içersindekine eşittir. Ne kadar süresini alır?

c.) Farz edin cankurtaran sizsiniz.İki ekstrem a.) ve b.) arasından herhangi bir Q' yu seçiniz (çabuk seçiniz) kişinin yanına giden en hızlı yolu seçiniz Mesafe u'nun ve w 'nin uzunluğunu (resim 1) t_u ve t_w gerekli zamanını da hesaplayınız. Kişiye ulaşmak için gerekli genel zamanı t_{entire} tasvir edin. Hanginiz en hızlı?

d.) Bir cankurtaran x mesafesinden H noktasına olan Q noktasını seçdi. X bağlı t_{entire} ' ı hesaplayınız.
Tavsiye: Her şekilde değişken x'e bağlı c.)' yi adım adım hesaplayınız.

e.) d.)' nin sonucu t(x) teriminin fonksiyonudur. Buna göre bilgisayarda fonksiyonun grafiğini göz önünde bulundurun. Uygun bir koordinat sistemi seçiniz.Bu grafikte genel anlamda ne görebildiğinizi yazınız ve bir kaç örnekler veriniz..

f.) Cankurtaranın en hızlı olabileceği yere x mesafesini belirleyiniz.

Çözümler

a.) Karadan gitiiğinde (50m) : (7m/s) ≈ 7,1s ihtiyacı var. Kişiye ulaşmak için (71m) : (2m/s) ≈ 35,5s ihtiyacı var. Toplam 42,6s 'ye ihtiyacı var.

b.) Bu yoldan kuru yolda (71m) : (7m/s) ≈ 10,1s'ye ihtiyacı var ve (50m) : (2m/s) = 25s sudan. Toplam 35,1 s.

c.) <u>Örnek: Q noktası 10m H' den uzaklıkda</u>

Pythagoras teorisine göre $u = \sqrt{(50^2 + 10^2)} \approx 51$, bu nedenle u yaklaşık 51m uzunluğunda. Uzunluk w de Pythagoras teorisi ile hesaplanabilir. Aşağı olan uzunluk 50 m olduğunu biliyoruz, Q noktası H noktasından 10m mesafede ,karadan Q noktası 40 m mesafede ve kişi dik açılı bir üçgen tamamlıyor.

Geçerli olan $w = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64$; w uzunluğu yaklaşık 64m.

Bunu : t_u=(51m) : (7m/s) ≈ 7,3s, t_w=(64m) : (2m/s) = 32s takip ediyor, gerekli sürenin tamamının sonucu 39,3s.

d.) tekrar u uzunluğu ve w Pythagoras teorisini takip ediyor:

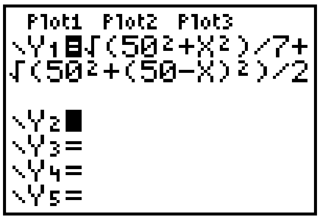
$u = \sqrt{(50^2 + x^2)}$ and $w = \sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}$.

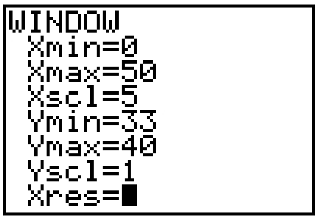
Bunu: t_u= $(\sqrt{(50^2 + x^2)}m):(7m/s)$, t_w= $(\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m):(2m/s)$ takip ediyor,

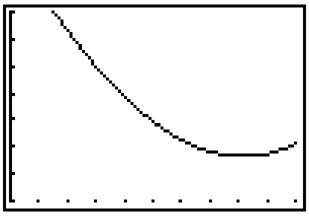
Bunun için gerekli olan süre

t_{entire}=$[(\sqrt{(50^2 + x^2)}m):(7m/s)]$+$[(\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m):(2m/s)]$.

e.) Grafik' de hesaplanan fonksiyon verisi figür 1 'de gösteriliyor. Res..2 grafik'deki uygun aks bölgesini gösteriyor (0<x<50, cetvel ünite 5, 33<y<40, cetvel ünite 1)



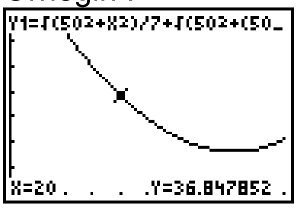


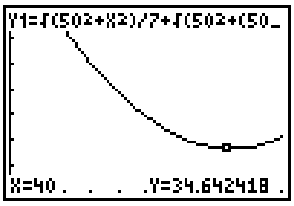


figür 1: fonksiyon verisi, figür.2a: seçilmiş aks bölgesi, figğr 2b: eş grafik

bu grafik cankurtaranın x'den H noktasına kadar olan mesafedeki Q noktasını seçdiyse eğer, gerekli olan (y- noktasını) zamanını gösteriyor.

Örneğin :

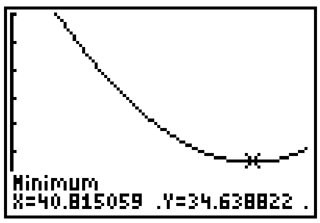




figür .3a *figure .3b*

figür 3a: Eğer Q H'den 20m uzaklıkda ise cankurtaranın yaklaşık 36,8s ihtiyacı var.
figür 3b: Eğer Q H'den 40m uzaklıkda ise cankurtaranın yaklaşık 34,6s ihtiyacı var.

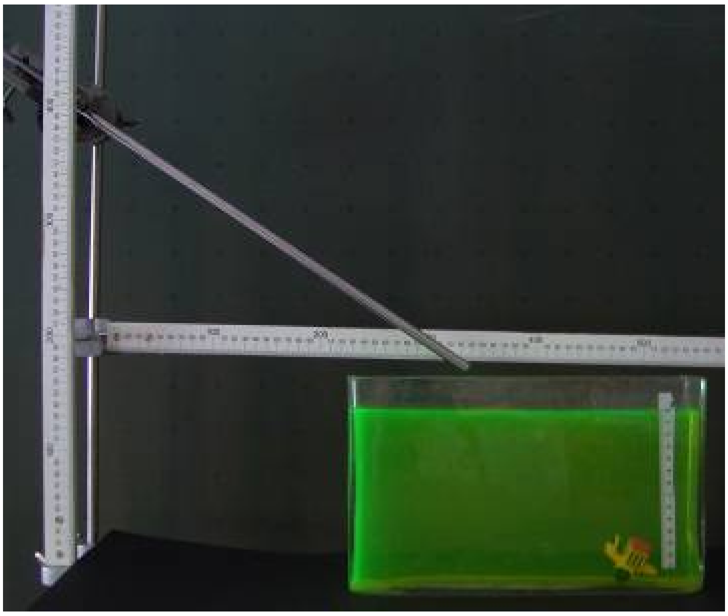
f.) İmgedeki en azın hesaplanması bir bilgisayar yardımı ile olur.T fig. 4'de görüldüğü üzere ,cankurtaranın en hızlı olduğu yol karadan noktasına yaklaşık 40,815m uzaklığındaki seçdiği Q noktası.O zaman yaklaşık 34,6s 'ye ihtiyacı var.



figür 4: Eğimin en düşük noktası biliqisayarda belirlenmiştir.

Çalışma kağıdı 2: Fermat'ın prensibi

Işık her zaman aynı hızda hareket etmez. Havadaki ışığın hızı 300.000 km/s oysa ışığın camda ve sudaki hızı ayrı ayrı sadece 200.000 km/s ve 225.000 km/s dir. Aynı zamanda ışık her zaman mükemmel bir cankurtaran olarak hareket eder. Işık sinyali her zaman A noktasından B noktasına giderken mümkün olan en kısa yolu seçdiği anlamına gelir. Bu davranış Fermat'ın prensibi dir. Bunu bulan ilk kişi Pierre de Fermat (1608-1665)' dan gelir



Figür 1 Su'da salyangoz.

Görev:
Küçük bir su salyangozu evinde biraz ışık istiyor. Bunun gerçekleştğrmek için lazer ışığının suyun dışına salyongoz evinin çatısına düz gelecek şekilde yerleştirilmesi gerekli.(figüre 1'e bakınız).

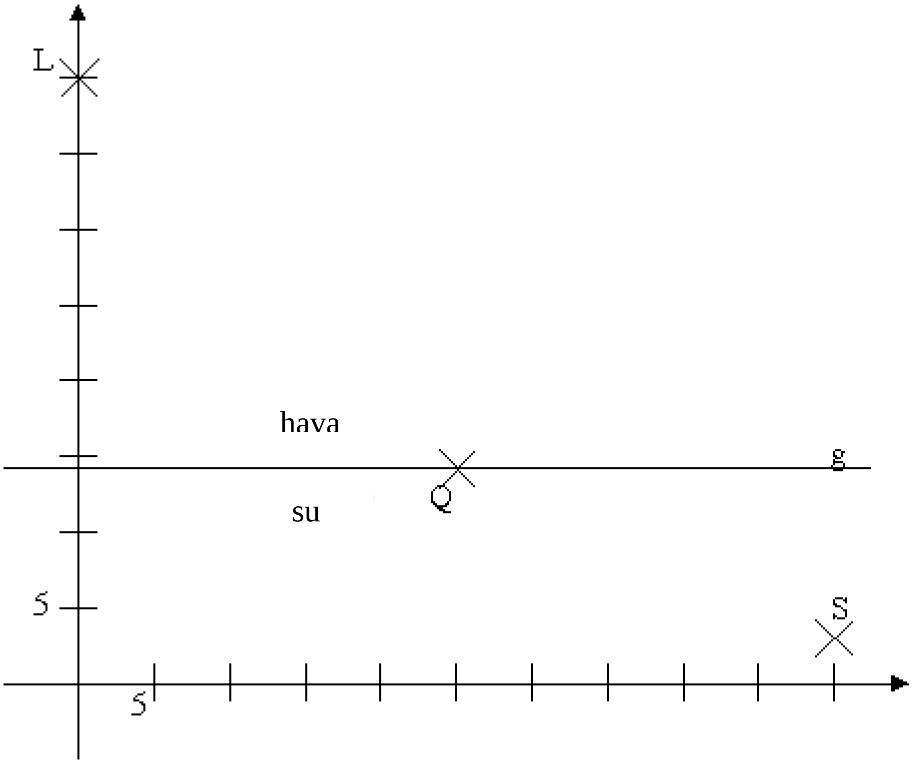
a.) Eğer figür 1'deki düzenlemeyi kaybedersek ve Kartezyen koordinat sistemine transfer edersek lazeri L(0/40) noktasına, su yüzeyini g düz alanında y=14 denklemine ve salyangoz evinin çatısını S(50/3) noktasında getiririz(tüm ölçümler santimetredir!).Bir koordinat sistemi çiziniz L, g ve S'yi ekleyiniz (uygun bir cetvel seçiniz).

b.) Lazer sadece ışığın suyu Q(x/14) noktasında karşılayacağı yere yerleştirebiliriz. Koordinat sisteminde a.) olarak rastgele bir Q noktası yerleştirin.

c.) Q noktası nereye yerleştirilmelidir ki ışık L' den Q' ya ve Q' dan S'ye en hızlı şekilde gitsin?

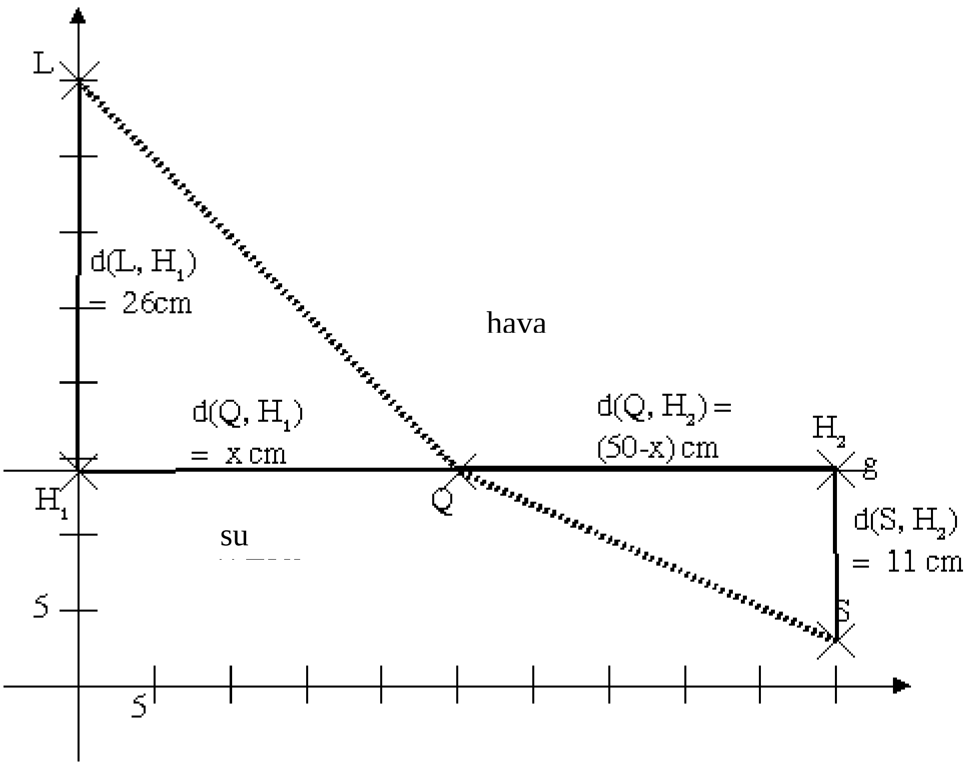
d.) Fermat prensibine dayanarak, lazer c.) olarak hesaplanan noktaya yerleştirilirse ne olur. Ayrıca hesaplanmış c.) noktasından farklı bir yere yerleştirilirse ne olacağını hesaba kat.

Çalışma kağıdı 2 için çözüm
a.) ve b.)



figür.2: a.) ve b.) için çözüm

c.) Kılavuz yardımı ile ve figür 3'deki görülen miktarla çözüm daha anlaşılır:



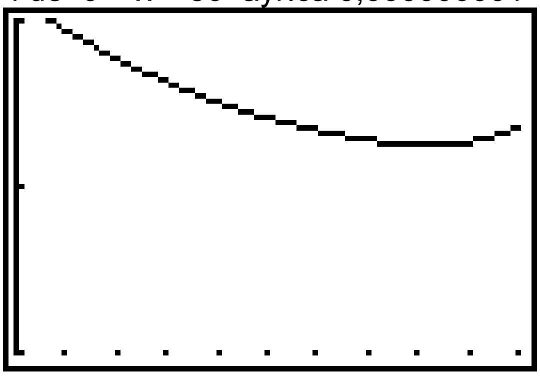
figür. 3 uygun kılavuz ve miktar

L ‘den Q’ya olan yol $\sqrt{26^2 + x^2}$ uzunluğunda. Havadaki mesafeye göre ışık 300.000.000 m/s = 30.000.000.000 cm/s hızla ilerler. Bu, ışığın yolunda ihtiyaç duyduğu süre L ‘den Q’ya $t_1 = \sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000$ saniye, olduğunu gösterir.

Q ‘dan S’ ye olan yol $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}$ uzunluğundadır. Su ‘daki mesafeye göre ışık (225.000.000 m/s = 22.500.000.000 cm/s) $t_2 = \sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$ saniye su’daki hızına göre hareket eder.

Gerekli sürenin sonucuna göre t_{requ} ışık L’den S’ye Q’ya yol bulmak için toplama bağlı t_{total} (x)= $\sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000 + \sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$ (saniyede) çıkar.

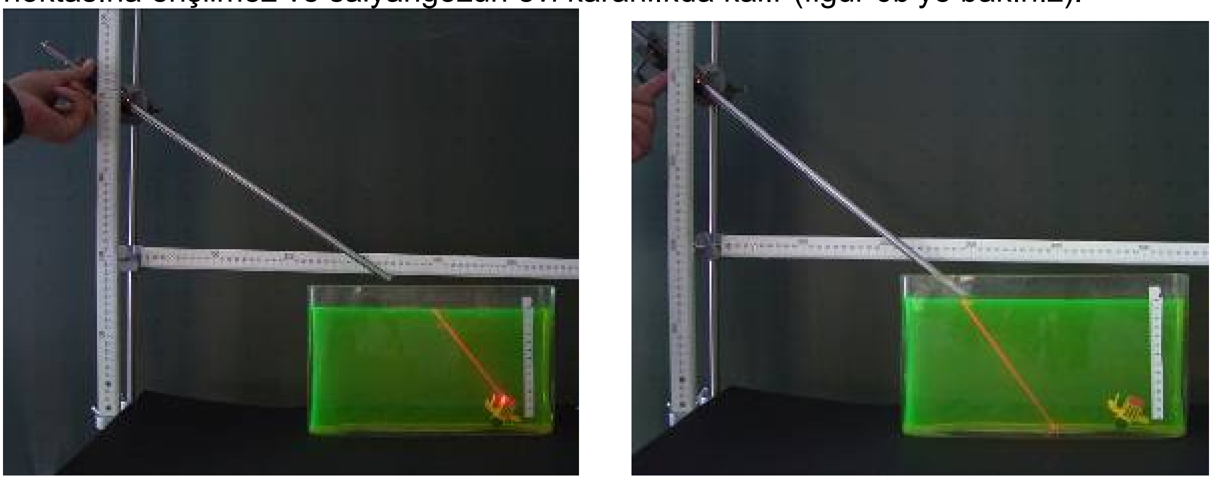
Bilgisayarda bu fonksiyonu t_{requ} görebilmek için sadece uygun yer seçmek gerekir. Figür 4’de $0 < x < 50$ ayrıca $0{,}000000001 < y < 0{,}000000003$ de seçilmiştir.



figür.4 fonksiyonun resmi t_{requ}.

Düşük noktanın hesabı – bilgisayar yardımı ile – en hızlı yol için yaklaşık **Q(41/14)** dır

d.) Lazer tahminen Q(41/41) noktasına yerleştirildiyse salyangozun evinin çatısı S’ye denk gelir (figure 6a’ya bakınız). Herhangi başka Q noktasında ışığın sinyali ‘kaybolur’ yani S noktasına erişilmez ve salyangozun evi karanlıkda kalır (figür 6b’ye bakınız).



figür.6 salyangozun evi ne aydınlık ne de karanlık da.