Učno gradivo

Ideja za izvedbo pri pouku

Uvod v Fermatov princip

Problem reševalca iz vode je, kako najti najhitrejšo pot od svoje trenutne pozicije na plaži do utaplaloče se osebe v vodi – predpostavimo, da reševalec opazuje "situacijo" s strani. Ker je tek po obali hitrejši od plavanja, najhitrejša pot ni "iti naravnost v vodo". Najhitrejša pot ne vodi naravnost do utapljajoče se osebe. Zato teče po plaži dalj časa, preden začne plavati. Fermatov princip nam pravi, da se svetloba obnaša kot odličen reševalec iz vode. Zaradi jasnosti je ta primer zelo dober za predstavljanje teme. Glavni poudarek je na problemu matematičnega minimiziranja.

Lahko predpostavimo, da se zaradi nepoznavanja analize dijaki do sedaj še niso soočili z nobenim problemom, kjer bi iskali ekstreme. Zato moramo uvod izpeljati zelo "strogo". To lahko naredimo tako, da korak za korakom računamo čas, ki ga reševalec potrebuje za določeno pot, ki jo predlagajo dijaki (glej delovni list 1). Tako bodo v novem kontekstu vadili še Pitagorov izrek. Samo tako lahko usmerimo pozornost na fleksibilnost točke, kjer gre reševalec v vodo, in izrazimo funkcijo časa, ki ga reševalec potrebuje. Ko bomo gledali graf funkcije, bomo iz njegove razlage ugotovili, da dejansko iščemo minimum.

Rezultate prvega delovnega lista lahko preverimo celotni skupini ali pa samo podamo rešitve in si dijaki sami pregledajo svoje rezultate, če je razred navajen na ta način (glej rešitve delovnega lista 1). Tedaj lahko dijaki rezultate primerjajo ali si s pomočjo rešitev pomagajo, če so imeli kje kakšen problem. Posamezne rešitve lahko namestimo na različne konce učilnice, tako se morajo dijaki za celotne rešitve malo potruditi. To metodo lahko prilagodimo tako, da damo dijakom, ki imajo težave, pisni nasvet, kako priti do rešitev, preden pogledajo na aktualne rešitve.

Tudi v drugem delu bodo imeli dijaki priložnost, da "prehodijo pot" do rešitve. Tisti dijaki, ki niso zmogli rešiti prvega dela samostojno, imajo zdaj priložnost, da preverijo, če so rešitve razumeli, saj morajo zdaj podoben problem rešiti sami. Fermatov princip jim je predstavljen kot: "Svetloba se obnaša kot odličen reševalec." Dobili bodo podatke o hitrosti svetlobe v zraku in vodi ter opis eksperimenta z virom svetlobe (laserjem) v zraku in objektom pod vodo. Naloga je poiskati točko na vodni gladini, ki jo moramo doseči z laserjem, da osvetlimo predmet v vodi (glej delovni list 2). Da bi potrdili rezultate, moramo seveda narediti tudi eksperiment (glej tudi rešitve delovnega lista 2).

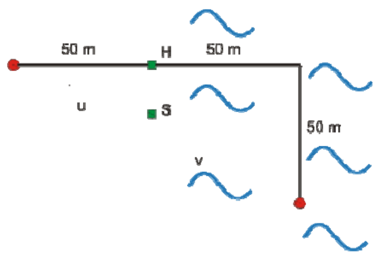
Obema delovnima listoma naj sledi matematična in fizikalna diskusija z dijaki. Glede matematike: pogovorimo se lahko o strukturiranem postopku in sestavimo nekakšen recept za reševanje problemov ekstremnih vrednosti, ki jih bodo še srečevali. Glede fizike: to računanje lahko posplošimo. Tedaj lahko na lom gledamo kot na rezultat dejstva, da se svetloba sreča objektom, ki ima drugačno gostoto. S pomočjo loma lahko razložimo pojave vsakdanjega življenja, ko opazujemo različne objekte v vodi. Pomembno je tudi, da pokomentiramo odbojni zakon "vpadni kot žarka je enak odbojnemu."

Potrebni pripomočki: Eksperiment je potreben samo za preverbo rezultatov. Potrebujemo (glej slike):
Steklena posoda (vsaj 40 cm dolga in 30 visoka), laser, črv ali drug primeren pripomoček, trinožnik, merila

Delovni listi (za kopiranje – glej naslednje strani)

Delovni list 1: Problem obalnega stražarja

Reševalec iz vod Miha stoji pred svojim stolpom, ko v vodi opazi utapljajoče se osebo. Če gre naravnost, ima do vode 50 metrov. Od tam je nadaljnih 50 metrov naravnost in 50 metrov južno, da pride do osebe v stiski (slika 1). Miha ve, da gre po obali s hitrostjo 7 m/s, v vodi pa samo 2m/s. Da bi do osebe prišel kar najhitreje, začne teči naravnost vzdolž obale do točke S in od tam plava direktno do osebe. Na obali preteče razdaljo *u* metrov in *v* metrov v vodi.



Slika 1

a) Koliko časa bi potreboval Miha, če bi najprej tekel 50 metrov proti morju (do točke H) in nato preplaval 71 metrov do osebe?

b) Miha bi lahko tekel tudi do točke na obali, od katere bi potem plaval naravnost proti osebi. To pomeni, da bi pretekel 71 metrov po obali in 50 metrov preplaval. Koliko časa bi potreboval?

c) Predstavljaj si, da si ti Miha. Določi točko S (določi hitro) med obema ekstremoma iz a) in b), izberi tisto, za katero misliš, da bi po njej najhitreje prišel do osebe v vodi. Izračunaj dolžini *u* in *v* (slika 1) in pripadajoča časa t_u in t_v. Potem določi skupni čas t_{skupni}, ki ga potrebuješ, da prideš do osebe. Primerjaj s sosedi. Kdo je najhitrejši?

d) Miha je izbral točko S tako, da je od točke H oddaljena x. Izračunaj t_{skupni} glede na x.
Namig: Računaj po korakih kot v c), le da namesto številke vstaviš spremenljivko x.

e) Rezultat d) je funkcija t(x). Preuči krivuljo te funkcije s pomočjo računalnika. Izberi primeren koordinatni sistem. Napiši, kaj lahko ugotoviš iz grafa v splošnem in daj nekaj primerov.

f) Določi razdaljo x tako, da bo obalni stražar najhitrejši.

Rešitve za delovni list 1:

a) Do vode potrebuje: $\frac{50m}{7\frac{m}{s}} \doteq 7.1\ s.$

Do osebe potrebuje: $\frac{71m}{2\frac{m}{s}} \doteq 35.5\ s.$

Skupaj potrebuje *42.6 s.*

b) Do vode potrebuje: $\frac{71m}{7\frac{m}{s}} \doteq 10.1\ s.$

Do osebe potrebuje: $\frac{50m}{2\frac{m}{s}} = 25\ s.$

Skupaj potrebuje *35.1* s.

c) Primer: Točko S izberemo 10 metrov od točke H.
Po Pitagorovem izreku je $u = \sqrt{50^2 + 10^2} \doteq 51$, zato je *u* približno 51 metrov. Razdaljo v lahko prav tako izračunamo s Pitagorovim izrekom. Pravokotni trikotnik dobimo, če potegnemo pravokotnico na obalo skozi točko S. Dolžina te je 50 metrov, vzporednica z obalo pa ima 40 metrov (50 metrov – 10 metrov). Zato $v = \sqrt{50^2 + 40^2} \doteq 64$, zato je v dolga natanko 64 metrov.
Iz tega sledi, da je: $t_u = \frac{51m}{7\frac{m}{s}} \doteq 7.3\ s$ in $t_v = \frac{64m}{2\frac{m}{s}} \doteq 32\ s$ in zato $t_{skupni} = 39.3\ s$.

d) Ponovno dolžini *u* in *v* izrazimo s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$u = \sqrt{50^2 + x^2} \quad \text{in} \quad v = \sqrt{50^2 + (50-x)^2}.$$

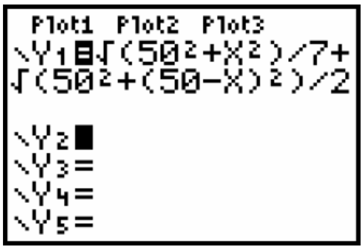
Iz tega sledi:

$$t_u = \frac{\sqrt{50^2+x^2}\,m}{7\frac{m}{s}} \quad \text{in} \quad t_v = \frac{\sqrt{50^2+(50-x)^2}\,m}{2\frac{m}{s}}.$$

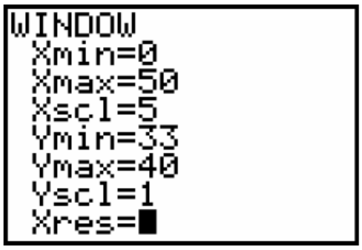
Skupni čas je tako:

$$t_{skupni} = \frac{\sqrt{50^2+x^2}\,s}{7} + \frac{\sqrt{50^2+(50-x)^2}\,s}{2}.$$

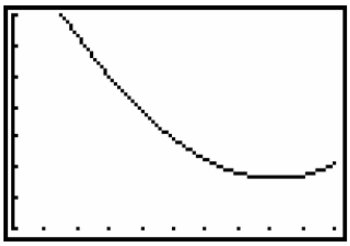
e) Spodnje slike prikazujejo rešitev, do katere smo prišli s pomočjo grafičnega računalnika. Slika 4 prikazuje graf funkcije na primerno izbranem področju (0<x<50, enota osi: 5; 33<y<40, enota osi: 1)



Slika 2: funkcijski izraz

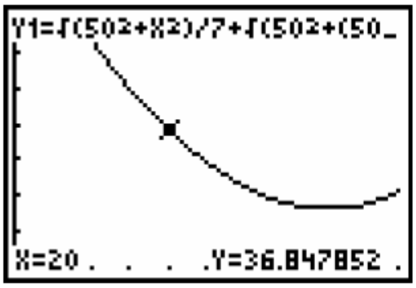


Slika 3: izbrano področje

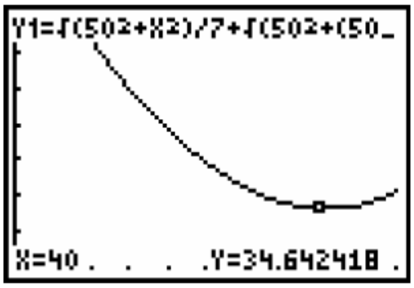

Slika 4: pripadajoči graf

Ta graf prikazuje čas *t* (*y* - os), ki ga stražar potrebuje, če si izbere točko S, ki je od točke H oddaljena za x.

Primera:



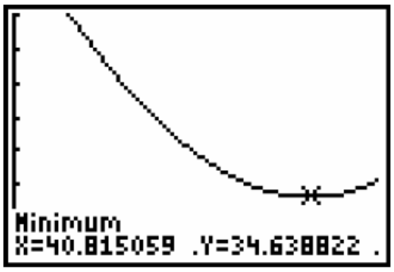
Slika 5



Slika 6

Če je točka S 20 metrov oddaljena od točke H, reševalec iz vode potrebuje približno 36.8 s (slika 5).
Če je točka S 40 metrov oddaljena od točke H, reševalec iz vode potrebuje približno 34.6 s (slika 6).

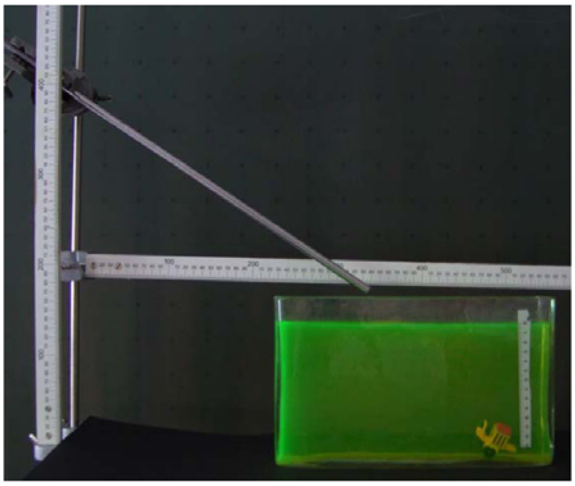
f) Minimum funkcije na sliki lahko izračunamo s pomočjo računalnika. Kot vidimo na sliki 7, je reševalec iz vode najhitrejši, če izbere točko S, ki je približno 40.815 metrov oddaljena od točke H. Tedaj potrebuje približno 34.6 s.



Slika 7: najnižjo točko smo določili s pomočjo računalnika

Delovni list 2: Fermatov princip

Svetloba ne potuje vedno z enako hitrostjo. Hitrost svetlobe v zraku je 300 000 km/s, v steklu le 200 000 km/s, v vodi pa 225 000 km/s. Vedno pa se svetloba obnaša kot odlični reševalec iz vode. To pomeni, da žarek svetlobe vedno izbere najkrajšo možno pot od točke A do točke B. Takšno obnašanje svetlobe imenujemo Fermatov princip – poimenovan je po Pierreu de Fermatu (1608-1665), ki je odkril ta pojav.



Slika 1: Polž v vodi

Naloga: Mali vodni polž bi rad imel v svoji hišici malo svetlobe. Da bi to dosegli, moramo laser, ki je zunaj vode, usmeriti točno na „streho“ njegove hišice (glej sliko 1).

a) Vpeljimo kartezične koordinate na sliko 1. Tedaj ima laser koordinati *L(0,40)*, vodna površina je ravna črta *g* določena z enačbo *y = 14* in streha polževe hišice ima koordinate *P(50,3)* (vse mere so v centimetrih). Nariši koordinatni sistem in vnesi *L*, *g* in *S* (izberi primerne enote).

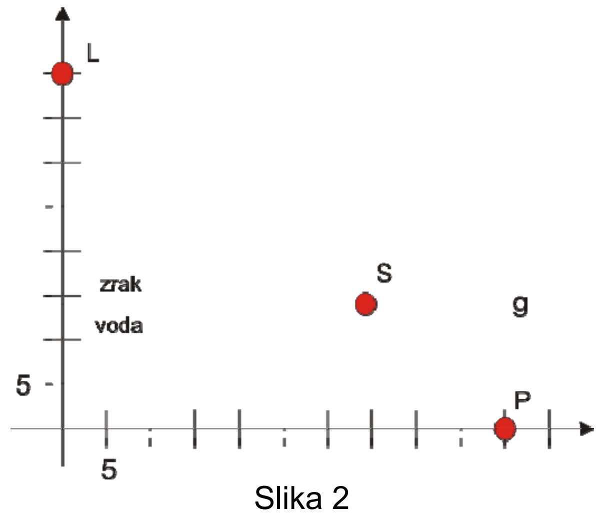
b) Laser je pritrjen tako, da se lahko svetloba sreča z vodno površino le v točki *S(x,14)*. Izberi poljubno točko *S* v svojem koordinatnem sistemu, ki si ga narisal pod a).

c) Kje bi morala biti točka *S*, da bi svetloba potovala najhitreje od *L* do *S* in od *S* do *P*?

d) S pomočjo Fermatovega principa ugotovi, kaj se bo zgodilo, če je laser usmerjen v točko izračunano pod c). Ugotovi tudi, kaj se bo zgodilo, če bo laser usmerjen v kakšno drugo točko.

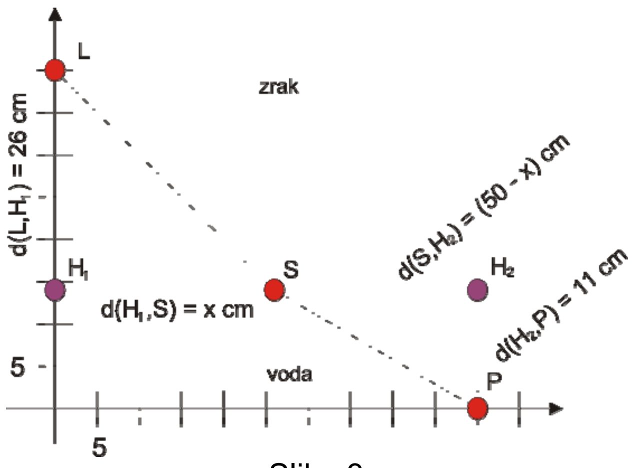
Rešitve za delovni list 2:

a) in b):



Slika 2

c):



Slika 3

Pot od L do S je dolga $\sqrt{26^2 + x^2}$. Ker svetloba potuje po zraku s hitrostjo 300 000 000 m/s = 30 000 000 000 cm/s. Zato svetloba potrebuje:

$$t_1 = \frac{\sqrt{26^2 + x^2}}{30\,000\,000\,000}\text{ s}$$

od točke L do S.

Pot od S do P je dolga $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}$. Ker svetloba potuje v vodi s hitrostjo 225 000 000 m/s = 22 500 000 000 cm/s. Zato svetloba potrebuje:

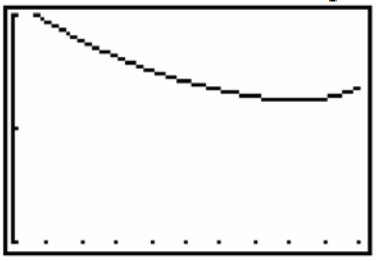
$$t_2 = \frac{\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}}{22\,500\,000\,000}\text{ s}$$

od točke S do P.

Od L do P preko S je torej:

$$t_{skupni} = \frac{\sqrt{26^2 + x^2}}{30\,000\,000\,000} + \frac{\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}}{22\,500\,000\,000}\text{ s.}$$

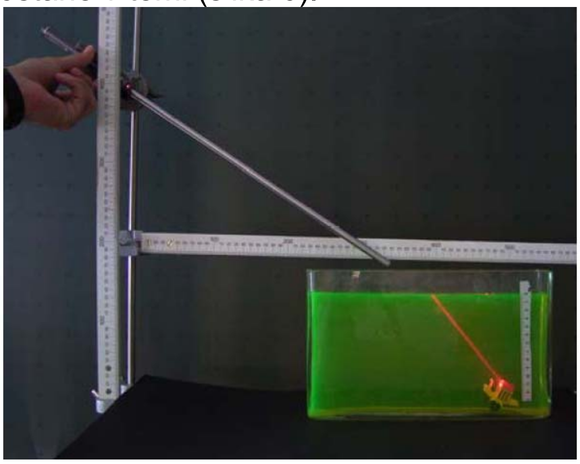
Na računalniku lahko sliko te funkcije vidimo samo na primerno izbranem področju. Na sliki 4 smo izbrali: $0 < x < 50$ in $0.000\,000\,001 < y < 0.000\,000\,003$.



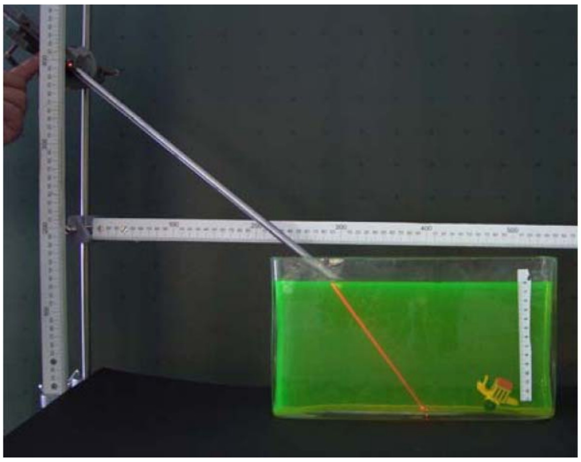
Slika 4

S pomočjo računalnika lahko določimo x-koordinato najnižje točke, ki je približno 41. Tako točka *S(41,14)* predstavlja najhitrejšo pot.

d) Če laser usmerimo približno v točko S(41,14), bomo z žarkom zadeli streho polževe hišice (slika 5). Če laser usmerimo v katerokoli drugo točko, ubogi polžek ostane v temi (slika 6).



Slika 5: Polževa "streha" je osvetljena.



Slika 6: Polžek ostane v temi.

Ta projekt se financira s podporo Evropske komisije. Ta publikacija izraža le stališča avtorja ali avtorjev in Komisija ne odgovarja za kakršno koli uporabo v njej navedenih informacij.