The **ScienceMath-**project : **Rencontre Fermat-Pythagore**
Idée: Thilo Höfer,
Staufer Gymnasium, Waiblingen, Allemagne

Le matériel du cours

La proposition du cours

L'introduction du principe de Fermat avec le problème du maître nageur

On entend par le problème du maître nageur, la difficulté que celui-ci trouve en cherchant le chemin le plus rapide pour sauver un naufragé positionné latéralement dans la mer. Puisqu'on est plus rapide sur la terre que dans l'eau, le chemin le plus rapide ne mène pas rectiligne vers la personne, mais par rapport au chemin direct, on doit courir plus longtemps avant qu'on saute dans l'eau. Selon le principe de Fermat, la lumière se comporte comme un maître nageur parfait. En raison de son évidence, ce problème est bien approprié comme point de départ. Tout d'abord, on s'adonne au problème de minimisation nettement mathématique.

Ainsi, il faut s'y attendre que le point de départ sera dirigé très étroitement, puisque peu ou bien aucune analyse n'a traité le problème de valeur extrême. Cela peut se passer en calculant pas à pas le temps pris par le maitre nageur pour choisir un chemin concret (cf. Feuille de travail 1). Dans ce cas, on va probablement appliquer "l'assortiment du Pythagore", qui est encore une fois un contenu nouveau pour les élèves. Puis on fait attention à l'endroit variable, auquel se trouve le maitre nageur à chaque fois dans l'eau, ainsi qu'au temps pris par celui-ci. Ainsi, en regardant le graphique de la fonction d'objectif, ses assertions seront considérées et cela suscitera à calculer le minimum.

Le contrôle des résultats du premier plan de travail peut être effectué en commun, cependant il peut aussi être effectué par l'affiche des solutions (cf. solutions à la feuille de travail 1) si on connaît ce procédé en classe. Ainsi, les élèves peuvent déjà égaliser les résultats des devoirs partiels, ou bien lors des difficultés éventuelles, chercher une partie de solution pour pouvoir continuer le calcul. Les solutions partielles peuvent être accrochées, par exemple, dans des endroits différents de la classe en sorte qu'une vérification complète sera difficile. On peut encore différencier cette méthode en donnant seulement une indication de solution (formulée) aux groupes d'élèves aient des difficultés, avant qu'ils voient la solution. De plus, ces indications de solution peuvent être affichées. Dans une deuxième partie, l'occasion est donnée aux élèves pour aborder encore une fois la méthode de résolution évoquée ci-dessus. Ainsi, en particulier les élèves qui n'ont pas résolus la première partie indépendamment auront la chance de contrôler directement s'ils ont compris jusqu'ici la méthode de résolution, pour pouvoir ensuite résoudre indépendamment un devoir semblable. Le principe de Fermat va être donnée aux élèves en forme de „la lumière se comporte comme un maître nageur parfait". Alors, ils reçoivent à côté des vitesses de lumière en air et en eau une description de l'essai avec une source de rayon de lumière (pointeur laser) en air et un objet sous l'eau. Le devoir est de calculer le point qui doit être visé avec le pointeur laser pour atteindre l'objet (cf. Feuille de travail 2).

Évidemment, une réalisation de l'essai ne devait pas manquer afin de contrôler les résultats plus tard (cf. solutions de feuille de travail 2).

Comme suite à ces deux plans de travail, on propose des discussions mathématiques et également physiques dans le plénum de classe : Mathématique, le procédé peut être discuté encore une fois d'une manière structurée pour obtenir une sorte de "recette" pour les problèmes de valeur extrême ultérieurs. Physiquement, ce calcul-ci devait être généralisé et ainsi la réfraction devait en conséquence être formulée pendant la transition d'un rayon de lumière par les médias qui ont optiquement différents denses, pour expliquer aussi les phénomènes du quotidien avec un regard sur l'eau. Il est aussi important de discuter sur la conclusion de la qualité de réflexion "l'angle d'incidence égale l'angle de défaillance" justement par le même principe.

Matériel nécessaire

On aura besoin de l'expérience seulement une fois dans cette unité, puisque cela sert seulement au contrôle des calculs. Pour la construction de l'essai, on aura besoin de (cf. images) :

1 Bocal en verre (d'au moins 40 cm de long et de 30 cm de hauteur), 1 pointeur de laser, 1 "escargot" ou accessoire comparables, matériel de statif, décamètre à ruban

Feuilles de travail

WS 1 : le problème du maitre nageur

Le maître nageur Mitch se trouve devant sa tour, il voit une personne naufragé dans l'eau. 50 m est le chemin direct à l'eau. De là, la personne se trouve encore une fois 50 m tout droit plus loin et puis 50 m au sud (image. 1). Mitch sait qu'il est rapide au bord par 7m/s et dans l'eau par 2 m/s seulement. Pour arriver le plus vite possible à la personne, il court d'abord au bord en chemin direct jusqu'au point Q, puis il nage directement vers la personne.

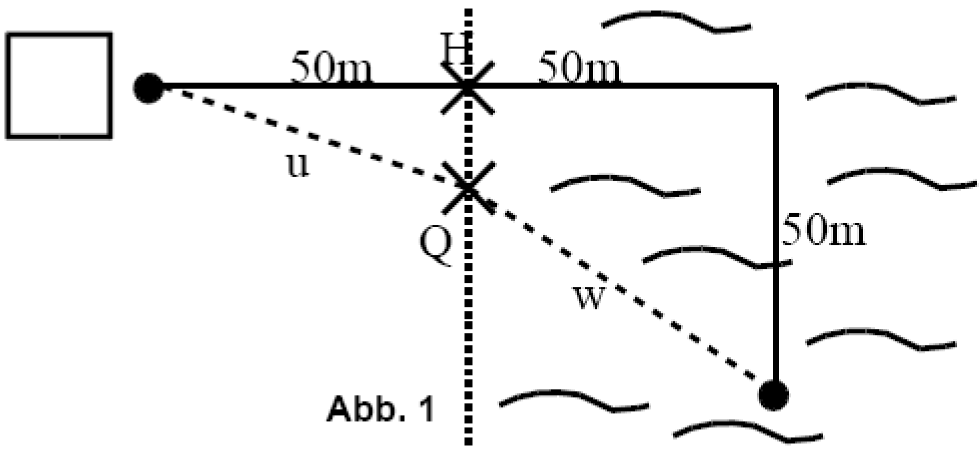


Abb. 1

Il fait u mètre au bord et w mètre dans l'eau.

a.) De combien de temps aurait-il besoin, s'il coure 50 m directement à l'eau (au point H) et puis il nage le parcours d'environ 71 m de longueur à la personne?

b.) Il pourrait aussi courir jusqu'au point depuis lequel il peut nager verticalement au bord à la personne. Alors, cela correspond à environ 71 m sur terre et exactement à 50 m dans l'eau. De combien de temps aurait-il besoin?

c.) Imagine maintenant, tu es le maître nageur. Choisi un point Q quelconque entre les deux extrêmes de a.) et b.) pour arriver à la personne le plus vite possible.

Calcule alors les longueurs de distances u et w (s. Application 1) ainsi que les temps tu et tw nécessaires pour ces deux longueurs de distances. Calcule avec cela au total le temps t_{ges} nécessaire jusqu'à la personne. Compare avec tes camarades. Qui est le plus rapide ?

d.) Un maître nageur a choisit le point Q pour se placer à la distance x au point H. Calcule t_{ges} en fonction de x.

Tuyau : Calcule graduellement les mêmes variables comme dans c.), justement à chaque fois en fonction des variables x.

e.) Le résultat de d.) donne une expression caractérisant la fonction t(x). Regarde le diagramme de la fonction correspondante à l'ordinateur. Choisi en plus le système de coordonnées convenable. Note alors en général ce que tu peux lire de ce diagramme et donne quelques exemples.

f.) Détermine la distance x si bien que le maitre nageur puisse arriver le plus vite possible.

Solutions

a.) Il a besoin jusqu'au bord de (50m) : (7 m/s) ~ 7,1s. Puis jusqu'à la personne (71m) : (2 m / s) ~ 35,5s. Au total, il a besoin de 42,6s.

b.) Avec ce trajet, il aura besoin de (71m) : (7 m / s) ~ 10,1s à terre et dans l'eau de

De la Propriété de Pythagore on a : $u = \sqrt{(50^2 + 10^2)} \approx 51$ donc u est d'environ 51 m de longueur

(50m) : (2 m / s) = 25s, au total de 35,1s.

c.) Exemple : <u>le point Q qui se trouve éloigné 10 m de H</u>.

On peut aussi calculer la longueur w avec la propriété de Pythagore. Alors, on sait que la longueur totale vers le bas est de 50 m, que le point Q a 10 m de distance de H, s'il a 40 m de distance du point au bord qui complète avec Q et avec la personne un

Ainsi, il convient que $w = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64$ la longueur w est d'environ 64 m.

Ainsi, il résulte **t_u=(51m) : (7m/s) ≈ 7,3s, t_w=(64m) : (2m/s) = 32s,** le temps total nécessaire est de 39,3s.

d.) De nouveau, les longueurs u et w résultent de la propriété de Pythagore

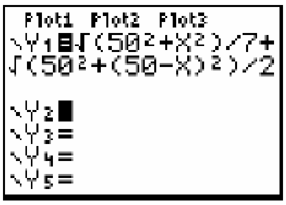
$u = \sqrt{(50^2 + x^2)}$ **und** $w = \sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}$.

Il en résulte **t_u**$= (\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)$, **t_w**$= (\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m) : (2m/s)$, le temps générale nécessaire est ainsi **t_{ges}=** $[(\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)] + [(\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m) : (2m/s)]$.

triangle perpendiculaire.

e.) La donnée de la fonction s'effectue en GTR, comme on peut le voir dans l'image 1. L'image 2 montre le graphique pour un domaine d'axe approprié choisi (0< x < 50, l'unité d'échelles 5, 33 < y < 40, l'unité d'échelles 1)

Image 1 : fonction donnée



Im. 2a : domaine d'axe choisi

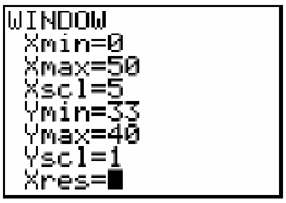
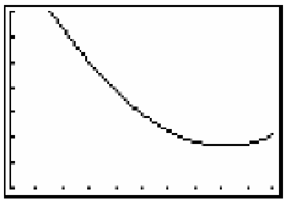
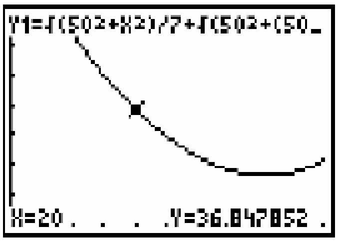
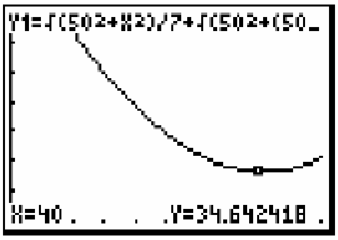


Image 2 b : graphique associé







Avec ce graphique, on peut lire le temps t (valeur y) dont le maitre nageur a besoin s'il choisit le point Q avec la distance x au point H. Exemple :

Image 3a Image 3b

Image 3a : Si Q se trouve 20 m éloigné de H, le maitre nageur aura besoin d'environ 36,8s
Image 3 b : Si Q se trouve 40 m éloigné de H, le maitre nageur aura besoin d'environ 34,6s.

f.) Avec l'ordinateur, on peut calculer le minimum sur le diagramme. Selon l'image 4, le maitre nageur fera le plus vite possible, s'il choisit le point Q au long de la ligne d´eau dans environ 40,815 m de distance au point H. Alors, il aura besoin d'environ 34,6s.

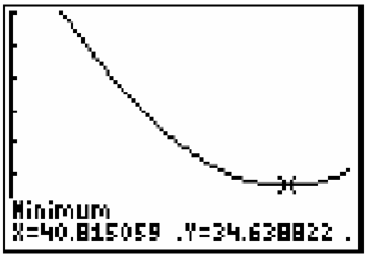


Image 4 : avec l'ordinateur, on détermine le point le plus profond sur la courbe.

WS 2 : le principe de Fermat

La lumière n'a pas la même vitesse partout. Par exemple, la vitesse de la lumière dans l'air est d'environ 300.000 km/s. La vitesse de la lumière dans le verre est au contraire seulement d'environ 200.000 km/s et dans l'eau d'environ 225.000 km/s. En outre, la lumière se comporte toujours comme un maitre nageur parfait, c.-à-d. un rayon de lumière passe d'un point A à un point B toujours par le chemin temporairement le plus court. On appelle cette attitude de lumière le principe de Fermat, selon Pierre de Fermat (1608 - 1665) qui le formulait pour la première fois.

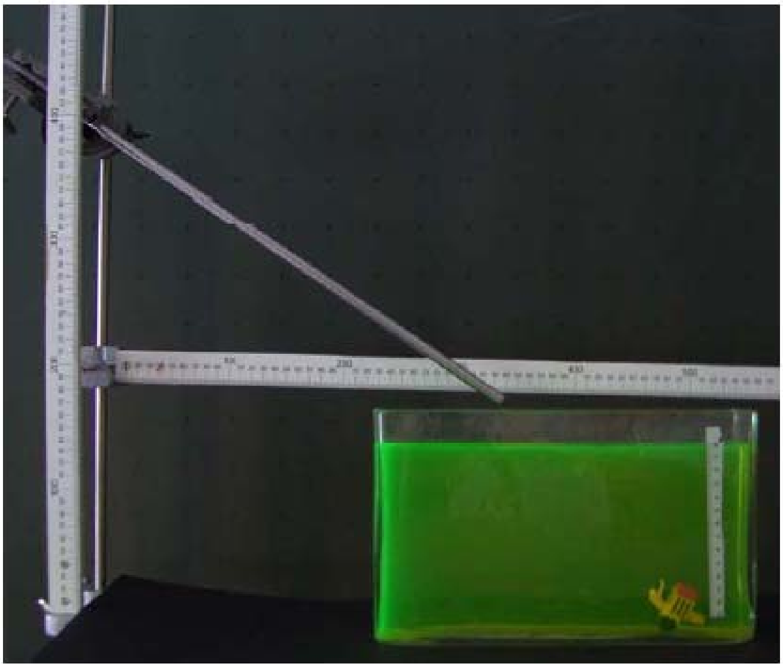


Image 1 l'escargot dans l'eau

Devoir :

Un petit escargot d'eau a besoin de lumière dans sa coquille. De plus, le rayon de lumière doit tomber d'un pointeur laser en dehors de l'eau exactement sur le toit (s. Image. 1).

a.) Si on ne trouve pas l'arrangement dans l'image 1 et que l'on reporte dans un système de coordonnées cartésien, comme ça on reçoit le pointeur laser dans le point l (0/40), la ligne d´eau au long de la droite g avec l'équation y = 14, ainsi que le toit de la coquille dans le point S (50/3) (toutes les indications sont données par centimètre !). Dessine un système de coordonnées et introduis L, g et S (choisis l'échelle d'application convenable).

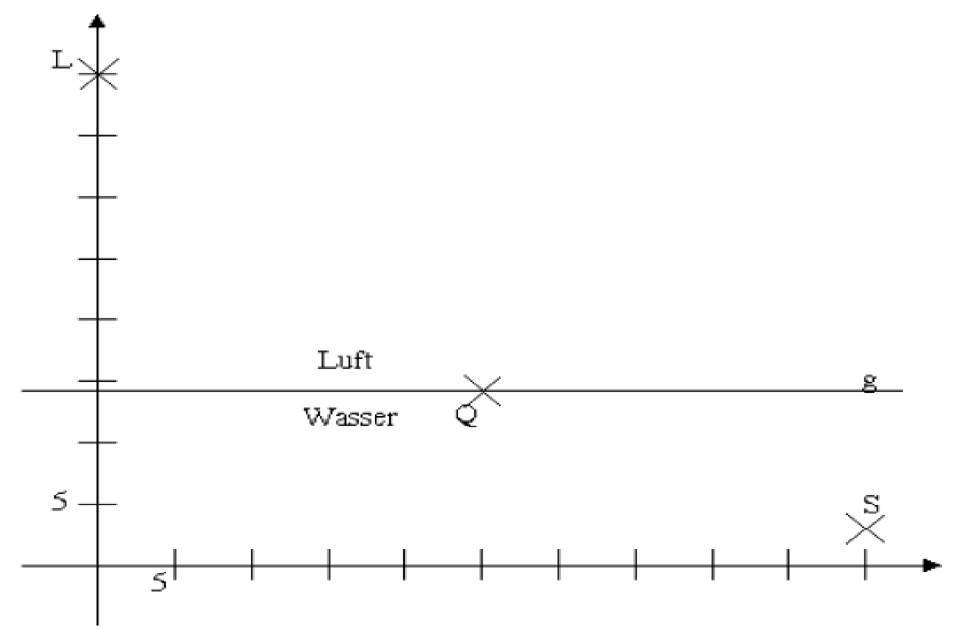
b.) Maintenant, le pointeur laser peut être si bien ajusté que son rayon de lumière atteins l'eau au point Q (x/14). Dessine n'importe quel point Q dans le système de coordonnées de a.).

c.) Où doit se trouver le point Q pour que la lumière en son chemin de l vers Q et encore de Q vers S fait temporairement le plus vite possible ?

d.) Réfléchis à l'aide du principe de Fermat ce qui se passera, si on pointe le pointeur laser sur le point calculé dans c.), et ce qui se passera, si un point est visé autre que celui calculé dans c.).

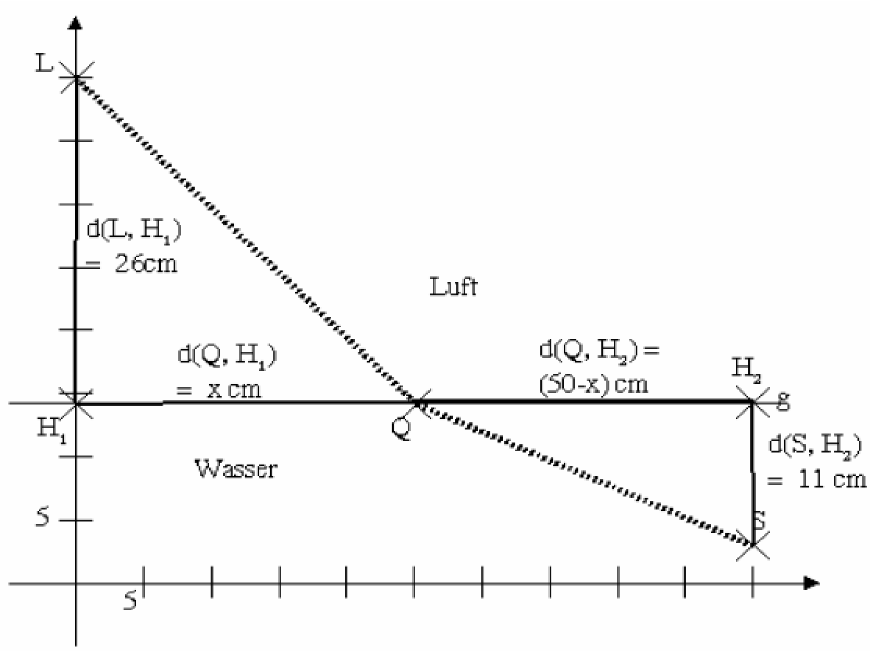
Corrigé de AB 2

a.) et b.)



Application 2 : solution de a.) et b.)

c.) avec les lignes auxiliaires et les dimensions reconnaissables dans l'application 3, la solution sera plus claire :



Application 3: lignes auxiliaires et dimensions convenables

Le chemin entre L et Q a la longueu $\sqrt{26^2 + x^2}$ Puisque le chemin est dans l'air, la lumière a ici une vitesse de **300.000.000 m/s = 30.000.000.000 cm/s.** Ainsi la lumière en chemin de L vers Q a besoin du temps $t_1 = \sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000$ secondes.

Le chemin de Q vers s a une longueur d $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}$, ici la lumière en raison de sa vitesse dans l'eau **(225.000.000 m/s = 22.500.000.000 cm/s)** le temps

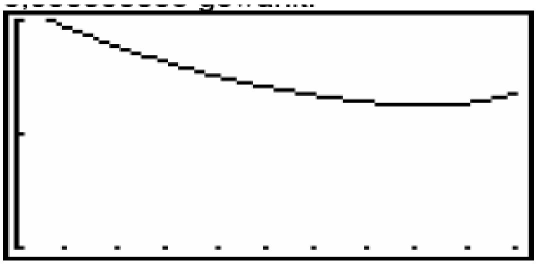
$t_2 = \sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$ secondes.

Pour le temps t_{ges} nécessaire de la lumière en chemin de L à travers Q vers S, résulte la dépendance

$$t_{ges}(x) = \sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000 + \sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$$

(en secondes)

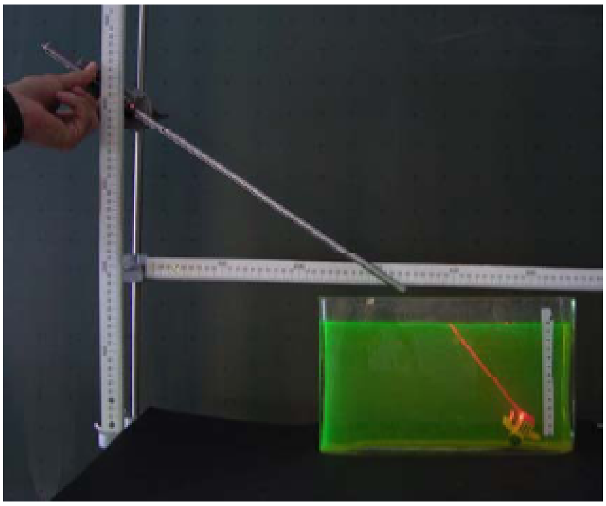
En ordinateur, on reconnaît le diagramme de cette fonction tges seulement au domaine approprié choisi. Dans l'application 4 on choisi 0 < x < 50 ainsi que 0,000000001 < y < 0,000000003.

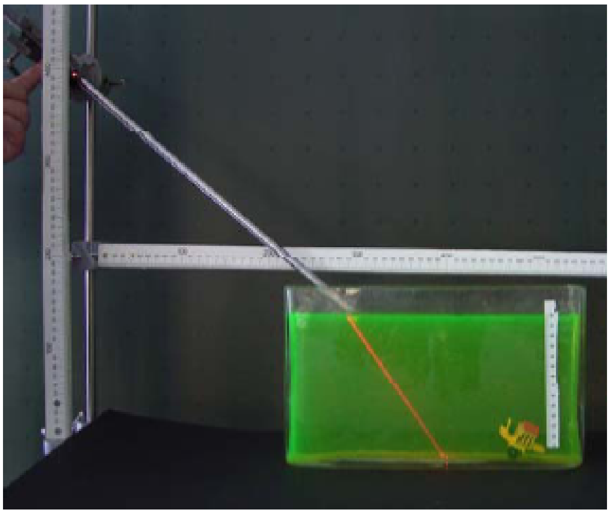


Application 4: Diagramme de la fonction t_{ges}

<u>Le calcul du minimum à l'aide de l'ordinateur donne approximativement pour le Q (41/14) le chemin le plus rapide.</u>

d.) Au cas où on pointe le rayon du pointeur laser approximativement vers le point Q (41/14), on atteint le toit de la coquille dans le point S (cf. Application 6a). Á chaque autre point Q (cf. Application 6 b), le rayon de lumière prend un cours en sorte que S ne soit pas atteint. La coquille reste sombre.





Application 6 la coquille va être éclairée ou elle reste sombre

Ce projet a été finance avec le soutien de la Commission européenne.
Cette publication (communication) n'engage que son auteur et la Commission n'est pas responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qui y sont contenues.