Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

# Opetusmateriaali

## Fermat'n periaatteen esittely

Hengenpelastajan tehtävässä kuvataan miten hengenpelastaja yrittää hakea nopeinta reittiä vedessä apua tarvitsevan ihmisen luo - olettaen, että hengenpelastaja katselee tilannetta sivusta. Koska rantaa pitkin juokseminen on nopeampaa kuin uiminen, nopein tie ei ole meneminen suoraan veteen. Nopein tie ei vie suoraan hukkuvan luo, siksi on käveltävä rantaa pitkin pidemmälle ennen kuin syöksyy uimaan. Fermat'n periaate osoittaa, että valo käyttäytyy kuten erinomainen hengenpelastaja. Koska esimerkki liittyy arkitilanteeseen, se sopii erittäin hyvin aiheen esittelyyn. Päähuomio kiinnitetään tehtävän luonteeseen matemaattisena ääriarvotehtävänä.

Oletettavasti ääriarvo-ongelmia on käsitelty hyvin vähän tai ei lainkaan, koska matemaattinen analyysi ei ole oppilaille vielä tuttu. Siksi tehtävän esittäminen kannattaa miettiä tarkoin. Se onnistuu helpoimmin, kun lasketaan vaiheittain hengenpelastajan oppilaan valitsemalla reitillä tarvitsema aika (katso tehtävämoniste 1). Näin saadaan samalla Pythagoraan lauseeseen todennäköisesti uutta sisältöä. Vasta sen jälkeen kiinnitetään huomio tilanteeseen, jossa hengenpelastaja menee veteen, ja esitetään hengenpelastajalta kuluvaa aikaa esittävä funktio. Funktion kuvaajaa tarkasteltaessa kiinnitetään huomiota myös lausekkeeseen, jonka avulla lasketaan funktion minimiarvo.

Ensimmäisen laskelman tulos voidaan tarkistaa yhdessä ryhmän kanssa. Oppilaiden voidaan myös antaa tarkistaa ratkaisut itse, jos luokka on tottunut tekemään näin (katso tehtävämonisteen 1 ratkaisut). Tässä tapauksessa oppilaat voivat vertailla tehtävän tuloksia, tai jos heillä on vaikeuksia, he voivat valita vaikka vain osan ratkaisusta ja jatkaa siitä. Eri ratkaisut voidaan sijoittaa näkyviin luokassa. Menetelmää voidaan muunnella antamalla vaikeuksia kokeville oppilaille kirjallisia neuvoja ratkaisuun pääsemiseksi ennen kuin he voivat katsoa ratkaisua itse.

Nämä ratkaisut voidaan myös panna esille.

Toisessa osassa oppilailla on taas mahdollisuus seurata ratkaisun polkua. Erityisesti oppilaat, jotka eivät ole pystyneet ratkaisemaan ensimmäistä osaa itse, saavat nyt mahdollisuuden tarkistaa suoraan vaiheittain, ovatko he ymmärtäneet ratkaisun, ja he voivat nyt ratkaista samantyyppisen tehtävän itse. Fermat'n periaate esitetään oppilaille muodossa "Valo käyttäytyy kuin erinomainen hengenpelastaja". Lisäksi valon nopeus ilmassa ja vedessä kokeillaan tilanteessa, jossa valonlähde (laser) on ilmassa ja kohde veden alla. Harjoituksessa lasketaan kohta, johon laser pitää tähdätä, jotta se osuisi kohteeseen (katso tehtävämoniste 2).

Tehtävämonisteiden lisäksi pitäisi yhdessä keskustella matematiikasta ja fysiikasta. Matematiikan osalta asian käsittelyä voidaan jäsennellä jonkinlaisen "reseptin" kehittämiseksi myöhemmin kohdattavia ääriarvo-ongelmia varten. Fysiikan osalta kyseinen laskentatapa pitäisi yleistää. Siten taittumista voidaan pitää seurauksena siitä, että valonsäde osuu kohteisiin, joilla on erilainen tiheys. Sillä voidaan selittää arkipäiväisiä ilmiöitä, jotka huomataan katsottaessa veteen.

On kuitenkin myös tärkeää kyseenalaistaa heijastumiseen liitetty johtopäätös "tulokulma on yhtä kuin heijastuskulma".

## Tarvittavat välineet

Koe on tehtävä vain kerran, koska sitä tarvitaan ainoastaan laskelmien tarkistamiseen. Kokeen järjestämiseen tarvittavat välineet (katso kuvat)

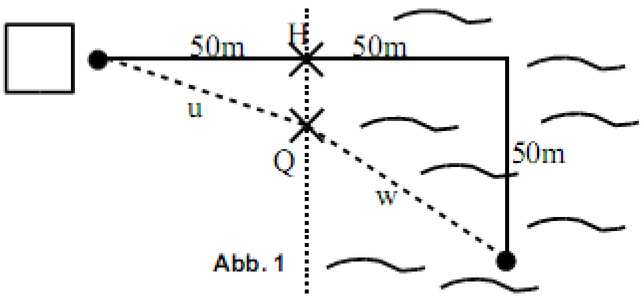
1 lasikuori (vähintään 40 cm pitkä ja 30 cm korkea), 1 laserosoitin, 1 "mato" tai vastaava väline, kolmijalka, mittanauhoja

**Tehtävämonisteet** (kopiot seuraavilla sivuilla)

The **ScienceMath**-project: **Fermat meets Pythagoras**
Idea: Thilo Höfer, Staufer Gymnasium Waiblingen Germany

Tehtävä 1: Hengenpelastaja

Hengenpelastaja Mikko seisoo torninsa edessä ja huomaa vedessä hädässä olevan ihmisen. Suorinta tietä veteen on 50 m matkaa. Siitä on vielä 50 m suoraan eteenpäin ja sitten täytyy kääntyä kohtisuoraan oikealle ja edetä 50 m apua tarvitsevan ihmisen luo (kuva 1). Mikko tietää, että hänen juoksunopeutensa on 7 m/s rannalla ja uintinopeutensa vain 2 m/s vedessä. Päästäkseen hädässä olevan luo niin nopeasti kuin mahdollista hän lähtee juoksemaan suoraan rantaa pitkin pisteeseen Q, josta hän ui suoraan ihmisen luo. Rannalla hän kulkee u metrin matkan ja vedessä w metrin matkan.




Kuva 1.

a) Kuinka kauan Mikolta kestää juosta 50 m matka ensin suoraan veteen (piste H) ja sitten uida 71 m matka ihmisen luo?

b) Hän voi myös juosta pisteeseen, josta hän voisi uida suorassa linjassa ihmisen luo. Tämä vastaa 71 m matkaa rannalla ja tasan 50 m matkaa vedessä. Kauanko häneltä menee siihen?

c) Kuvittele olevasi hengenpelastaja. Valitse mikä tahansa piste Q (tee valinta erittäin nopeasti) molempien ääripäiden a.) ja b.) väliltä. Valitse piste, jonka kautta on mielestäsi nopein tie ihmisen luo.

Laske matkojen u ja w pituudet (katso kuva 1) sekä tarvittavat ajat $t_u$ ja $t_w$. Päättele sitten ihmisen saavuttamiseen kuluva kokonaisaika $t_{kok}$. Vertaile saamaasi aikaa tovereittesi tuloksiin. Kuka on nopein?

d) Hengenpelastaja on valinnut pisteen Q niin, että se on x etäisyyden päässä pisteestä H. Laske $t_{entire}$ x:n mukaisesti.

Vihje: Laske vaiheittain samat luvut kuin kohdassa c.), mutta muuttujan x mukaisesti

e) Kohdan d.) tulos on funktiolauseke t(x). Tarkastele kyseisen funktion kuvaajaa tietokoneelta. Valitse sopiva koordinaatisto. Kirjoita muistiin, mitä näet kaaviosta ja anna esimerkkejä.

f) Määritä hengenpelastajalle lyhin mahdollinen etäisyys x.

## Ratkaisut

a.) Rannalle pääsemiseen menee (50 m) : (7m/s) ≈ 7,1s. Ihmisen luokse pääsemiseen menee (71m) : (2m/s) ≈ 35,5s. Yhteensä 42,6 s.

b.) Tällä tavalla häneltä kuluu (71m) : (7m/s) ≈ 10,1 s kuivalla maalla ja (50m) : (2m/s) = 25s vedessä. Yhteensä 35,1 s.

<u>c.) Esimerkki: piste Q 10 m päässä pisteestä H</u>

Pythagoraan lauseen mukaan

$$u = \sqrt{(50^2 + 10^2} \approx 51$$

Joten matka u on noin 51 m pitkä. Pituus w voidaan myös laskea Pythagoraan lauseella avulla. Kun tiedetään, että pituus alaspäin (kuvassa) on 50 m ja piste Q on 10 m päässä pisteestä H, etäisyys pisteeseen, jonka kanssa piste Q ja ihminen muodostavat suorakulmaisen kolmion, on 40 m. Siten pätee

$$w = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64$$

joten pituus w on noin 64 m.

Tästä seuraa: $t_u$=(51m) : (7m/s) ≈ 7,3s,

$t_w$=(64m) : (2m/s) = 32s,

tarvittava kokonaisaika on siten 39,3 s.

d.) Pituudet u ja w johdetaan jälleen Pythagoraan lauseesta:

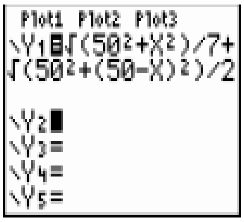
$u = \sqrt{50^2 + x^2)}$ ja $w = \sqrt{(50^2 + (50-x)^2}$ .

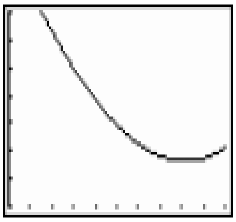
Tästä seuraa: $t_u$= $(\sqrt{(50^2 + x^2)m}) : (7m/s)$

$t_w$= $(\sqrt{(50^2 + (50-x)^2}m) : (2m/2)$

$t_{kok}$ = $(\sqrt{(50^2 + x^2)m}) : (7m/s) + (\sqrt{(50^2 + (50-x)^2}m) : (2m/2)$

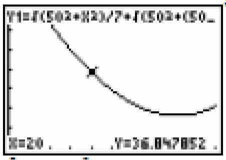
e) Funktio syötetään graafiseen laskimeen kuvan 1 mukaisesti.
Kuvissa 2a ja 2b näkyy oikein valitun akselin alueen kuvaaja (0<x<50, asteikkoyksikkö 5, 33<y<40, asteikkoyksikkö 1)

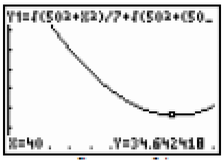




Kuva 1: funktion syöttäminen, kuva 2a: valittu akselin alue, kuva 2b: funktioon kuvaaja

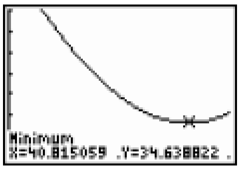
Tämä kuvaaja näyttää ajan t (y-piste), joka hengenpelastajalta kuluu, jos hän valitsee pisteen Q etäisyyden x päässä pisteestä H. Esim.:



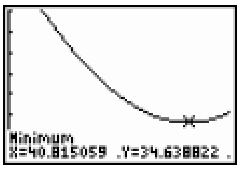



kuva 3a kuva 3b

kuva 3a: Jos Q on 20 m päässä pisteestä H, hengenpelastajalta kuluu noin 36,8 s.
kuva 3b: Jos Q on 40 m päässä pisteestä H, hengenpelastajalta kuluu noin 34,6 s.




f.) Kuvan minimi voidaan laskea tietokoneen avulla. Kuten nähdään kuvasta 4, hengenpelastaja pääsee paikalle nopeimmin, jos hän valitsee rannalla pisteen Q noin 40,815 m päässä pisteestä H. Tällöin häneltä kuluu noin 34,6 s.

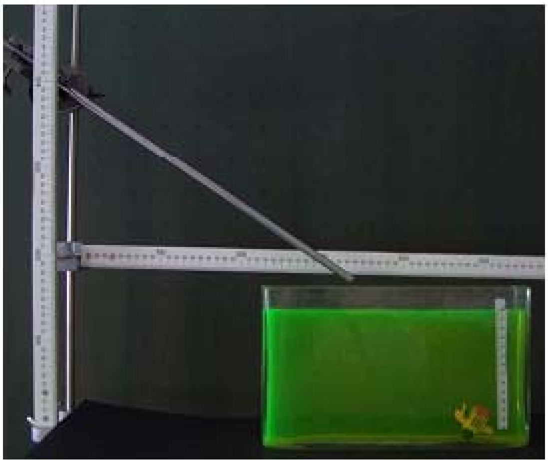



kuva 4: Käyrän alin piste määritettiin tietokoneella.

## Tehtävämoniste 2.  Fermat'n periaate

Valo ei aina kulje samalla nopeudella. Valon nopeus ilmassa on 300 000 km/s, kun taas lasissa se on vain 200 000 km/s ja vedessä 225 000 km/s. Sen lisäksi valo liikkuu aina kuin erinomainen hengenpelastaja.

Valonsäde siis valitsee aina lyhimmän mahdollisen tien pisteestä A pisteeseen B. Valon käyttäytymistä näin kutsutaan Fermat'n periaatteeksi ilmiön ensimmäisenä löytäneen Pierre de Fermat'n (1608-1665) mukaan.



### Tehtävä:

Pieni vedessä elävä etana haluaa vähän valoa asumukseensa. Tämän saavuttamiseksi veden ulkopuolelle asetetun laserin valon on kuljettava suoraan etanan asumuksen katon läpi (katso kuva 1).

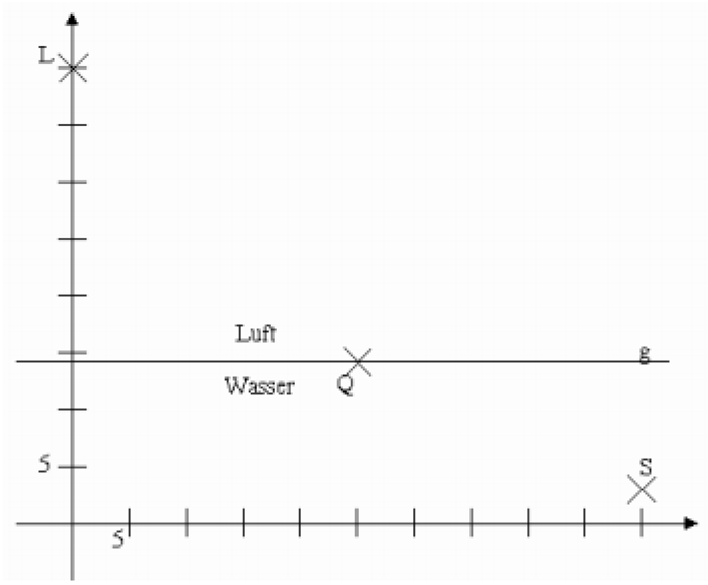
a.)  Jos kuvan 1 asetelma siirretään  koordinaatistoon, laser on pisteessä L(0/40), veden pinta suoralla linjalla g yhtälössä y=14 ja etanan asumuksen katto pisteessä S(50/3) (kaikki mitat senttimetrejä). Piirrä koordinaatisto ja sijoita siihen L, g ja S (valitse sopiva mittakaava).

b.) Laser voidaan sijoittaa vain niin, että sen valo kohtaa vedenpinnan pisteessä Q (x/14). Sijoita satunnainen piste Q kohdan a.) koordinaatistoon.

c.) Missä pisteen Q on oltava, jotta valo kulkisi nopeimmin pisteestä L pisteeseen Q ja pisteestä Q pisteeseen S?

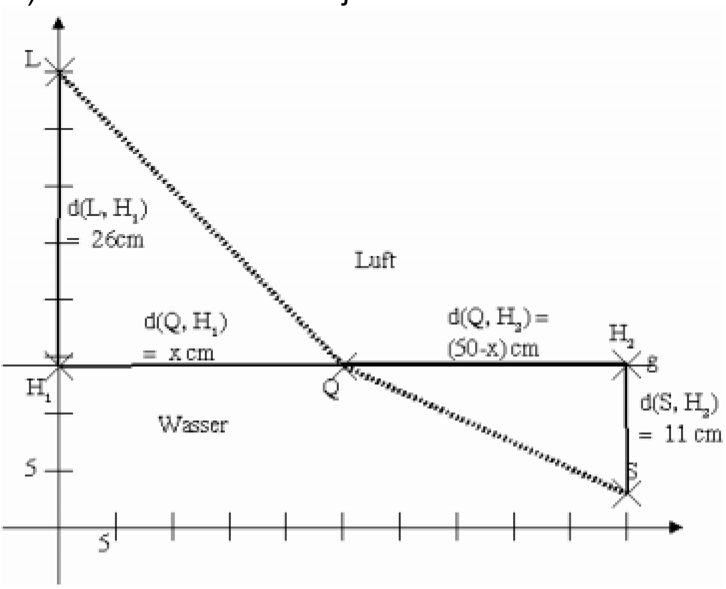
d.) Päättele Fermat'n periaatteen  avulla, mitä tapahtuu,  jos laser osoitetaan kohdassa c.) laskettuun  pisteeseen. Tarkastele myös, mitä tapahtuu, jos osoitetaan muuta kuin kohdassa c.) laskettua pistettä.

Ratkaisu tehtävämonisteeseen 2
a.) ja b.)




Kuva 2: Ratkaisu kohtiin a.) ja b)

c.) Kuvan 3 suositusten ja suureiden avulla väriliuos on havainnollisempi.




Kuva 3. suositukset ja suureet

Matka pisteestä L pisteeseen Q on $\sqrt{26^2 + x^2}$ pituinen. Koska etäisyys on ilmaa, valo kulkee 300 000 000 m/s = 30 000 000 000 cm/s. Valo tarvitsee siis ajan

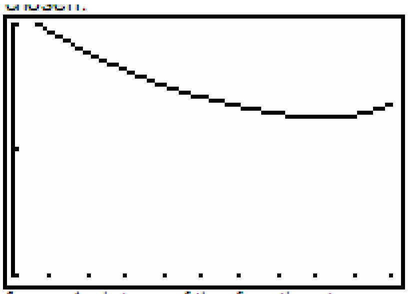
$t_1 = \dfrac{\sqrt{26^2 + x^2}}{30\,0\,00\,000\,000}$ sekuntia matkaan pisteestä L pisteeseen Q

Matka pisteestä Q pisteeseen s on $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}$ pituinen. Koska valo kulkee matkan vedessä, sen nopeus on 225 000 000 m/s = 22 500 000 000 cm/s

$t_2 = \dfrac{\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}}{22\,500\,000\,000}$ sekuntia.

Johtuen tarvittavasta ajasta $t_{tarv}$, jossa valo kulkee pisteestä L pisteeseen S pisteen Q kautta, riippuvuus $t_{total}$ (x)= $\dfrac{\sqrt{26^2 + x^2}}{30\,000\,000\,000} + \dfrac{\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}}{22\,500\,000\,000}$ sekunnissa) on otettava huomioon.

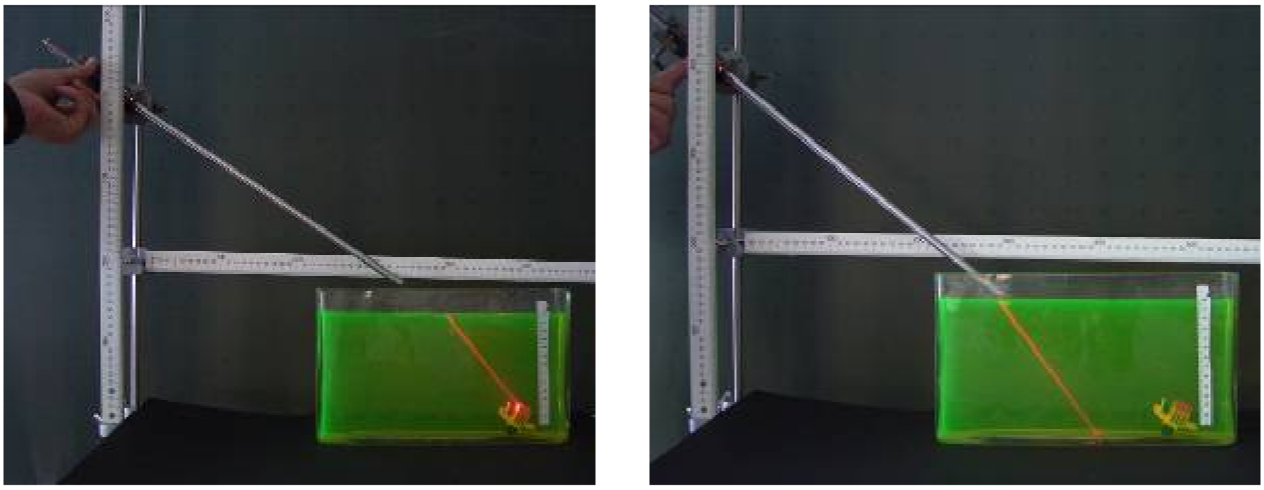
Tietokoneella funktion $t_{tarv}$ kuva näkyy vain oikein valitulla alueella. Kuvassa 4 valittiin 0 < x < 50 sekä 0,000000001 < y < 0,000000003.



kuva 4. kuva funktiosta $t_{tarv}$.

Tietokoneen avulla laskettu alin piste on noin Q(41/14) nopeimmalle tielle.

d.) Jos laser osoitetaan suurin piirtein pisteeseen Q(41/41), se osuu etanan asumuksen kattoon pisteessä S (katso kuva 6a). Kaikissa muissa pisteissä Q valonsäde eksyy eikä pistettä S saavuteta, vaan etanan asumus jää pimeään (katso kuva 6).



Kuva 6. Etanan laatikko on joko valaistu tai jää pimeäksi

Tämä projekti on rahoitettu Euroopan komission tuella. Tässä julkaisussa esitetyt näkemykset ovat vain tekijöiden omia, eikä komissio ole vastuussa mistään julkaisuun sisältyvien tietojen käytöstä.