Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Material didáctico

Sugerencia

Introducción al Principio de Fermat

El problema del salvavidas demuestra la dificultad que tiene este para sacar de la forma mas rápida posible a la persona que se encuentra en el agua. Asumiendo que que el salvavidas esta solo mirando la "situación" . Cuando el corre a lo largo de la playa es mas rápido a que como si fuera nadando, la forma mas rápida no es ir directamente al agua. La forma más rapida no conlleva en una linea recta hacia la persona, al contrario usted tendrá que recorrer lo máximo posible sobre la playa antes de empezar a nadar. El principio de Fermat demuestra que la luz se comporta como un perfecto salvavidas. Contando con la viveza este ejemplo es muy apropiado para introducir el tema. La idea principal es enfocarse en minimisar el problema matemático.
Usted puede asumir que gracias al desconocimiento del análisis, pocos a casi ningún problema con valores extremos hasta ahora han sido solucionados. Poreso la introducción ha de ser fuertemente llevada, esto puede hacerse haciendo los calclulos paso a paso del tiempo que necesita el salvavidas en cierto trayecto, escojido por un estudiante (Ver hoja de trabajo 1). Con esto los cotenidos del teorema de Pythagoras se practicarán de nuevo. Entonces es cuando la fexibilidad de la posición cuando el salvavidas entra al agua y la función del tiempo hasta que este llega al blanco o punto final van a ser planteados y dibujados. Mientras se mira el gráfico de la función hasta el blanco, este estatuto será considerado y posteriormente la necesidad de calcular el punto mas bajo se creará.

Se puede verificar los resultados del primer plan de trabajo sin tener en cuenta a todo el grupo. Los estudiantes tambien pueden dar soluciones individualmente si estan familiarizados con este procedimiento (Ver soluciones para la hoja de trabajo 1) En este caso los estudiantes podrán comparar los resultados de las subtareas o si tienen algún problema podrán tomar parte de la solución y terminarla ellos mismos. Soluciones particulares pueden ser puestas en distintas partes de la clase de esta forma el examen completo puede dificultarse. Este método puede ser diferenciado si se da a los estudiantes con mayores dificultades un consejo escrito de como obtener la solución antes de que ellos puedan mirar la solución actual. Esta solución debe ser tomada encuenta tambien.

En el segundo paso los estudiantes tendrán otra oportunidad de "seguir la trayectoria" para obtener la solución. Especialemte aquellos estudiantes que no hayan podido resolver el primer problema por si mismos. Ahora, ellos tendrán la oportunidad de verificar paso a paso si han entendido la solución al problema, ya que estarán en la posición de resolver una problema semejante por si mismos.

El principio de Fermat es presentado a los estudiantes de forma "La luz actúa como un perfecto salvavidas". En adición a la velocidad de la luz en el aire como en el agua, ellos recibirán una descripción de un experimento con la fuente de luz (Laser) en el aire y un objeto bajo el agua. La intención del ejercicio es el calcular el punto al que se tiene que llegar con el laser de tal forma que golpee el objeto (Ver hoja de trabajo 2). Para verificar los los resultados del experimento ha de hacerse una prueba, claro, no se puede dejar afuera (Ver hoja de respuestas al trabajo 2)

En adición a ambas hojas de trabajo, discuciones matemáticas y físicas han de ser tomadas en forma plena en la clase como: En cuanto a discuciones matemáticas, los procedimientos deberan discutirse nuevamente y estructuradamente de esta forma se generará una “receta” para la solucion a problemas con valores extremos que puedan ocurrir nuevamente. En cuanto a discuciones en Física este cálculo ha de ser generalizado. Porlo tanto el reflección puede ser el resultado de una viga de luz encontrada en objetos que tienen diferentes densidades. Puede ser utilizada para explicar el fenómeno que ocurre a diario cuando se mira directo al agua

Como si fuera poco, tambien es importante debatir las conclusiones de los atributos de la reflección “ angulo de incidencia es igual al angulo de reflección”.

Material necesario:

El experimento es necesario solo para esta unidad, ya que es necesario para controlar los cálculos. Material necesario para el experimento (ver las imagenes)

1 Recipiente de plastico (almenos 40 cm de largo por 30 cms de alto), laser puntador, 1 “lombriz” u objeto semejante, 1 tripode, reglas o metros para medir.

Hojas de trabajo (para copiar – ver las siguientes páginas)

El presente proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea. Esta publicación (comunicación) es responsabilidad exclusiva de su autor. La Comisión no es responsable del uso que pueda hacerse de la información aquí difundida.

HT 1: El problema del salvavidas

Mitch el salvavidas se encuentra frente a su torre de trabajo cuando observa a una persona que se esta ahogando en el mar. El camino directo hacia el mar es de 50m, desde ese punto hay otros 50m hacia el sur hasta la persona que se ahoga (Gráfico 1). Mitch sabe que su velocidad es 7m/s en tierra y solo 2m/s en el agua. Para rescatar a la persona de la forma mas rápida posible él empieza a correr a lo largo de la playa hasta llegar al punto Q desde donde empezará a nadar hasta llegar hasta la persona. Sobre la playa él recorre una distancia de ***u*** metros y ***w*** metros en el agua respectivamente.

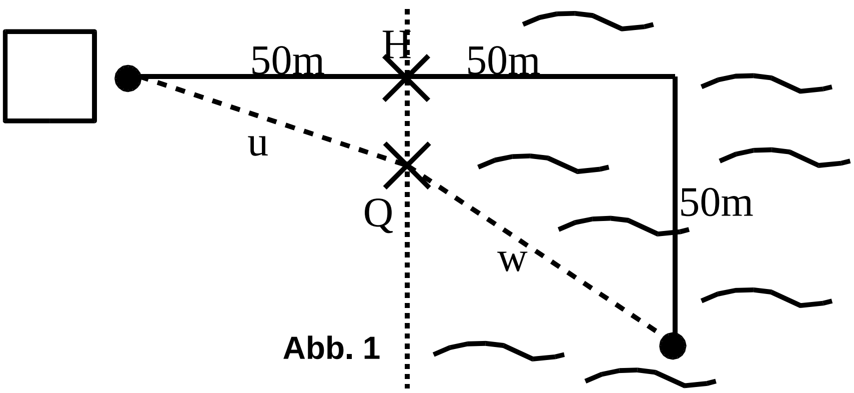


Abb. 1

a.) ¿Cuánto tiempo le llevará a Mitch recorrer 50 m directamente hacia el agua su primer punto (Punto H) y luego nada otros 71 m hasta la persona?

b.) El tambien puede correr hacia el punto donde podria ir luego en linea recta hacia la persona. Esto es equivalente a 71m sobre la playa y 50 m en el agua. ¿cuánto tiempo le tomará ?

c.) Imagine que usted es el salvavidas. Escoja cualquier punto Q (escojalo rapidamente) entre los dos puntos a.) y b.), Escoja el punto que usted crea es el mas rápido hacia la persona.
Calcule las distancias ***u*** y ***w*** (ver el gráfico 1) y el tiempo necesario t_u y t_w. Luego encuentre el tiempo completo requerido t_{entero} que necesita para llegar hasta la persona. Compare sus resultados con los de sus compañeros de clase, ¿ cuál de ustedes ha sido el mas rápido?

d.) Un salvavidas ha escojido el punto Q de tal forma enque este se encuentra situado en distancia de x al punto H. Calcule t_{entero} en concordancia a x.
Consejo: Calcule los mismos numeros paso a paso como en el punto c. Claro en concordancia a la varibale x.

e.) El resultado del punto d.) es la función t(x). Tenga en cuenta el cuadro de la función en el ordenador. Escoja un sitema de coordenadas apropiado. Escriba en general que es lo que se ve en este cuadro y de algunos ejemplos.

f.) Determine la distancia x de tal forma que sea mas rápido para el salvavidas.

Solución

a.) Para llegar a la orilla necesita (50m) : (7m/s) ≈ 7,1s. Para llegar hasta la persona (71m) : (2m/s) ≈ 35,5s. En total necesita 42,6s.

b.) De esta forma el necesita (71m) : (7m/s) ≈ 10,1s en terreno seco y (50m) : (2m/s) = 25s en el agua. En total 35,1 s.

c.) Ejemplo: punto Q 10m de distancia al punto H

Según el teorema de Pythagoras $u = \sqrt{(50^2 + 10^2)} \approx 51$, de esta forma u es aproximadamente 51m. La longitud w la podemos calcular con el teorema de Pythagoras. Como sabemos la distancia hacia abajo es de 50m, el punto Q esta a 10m de distancia de H que esta a 40m de distancia a la orilla donde Q y la persona completan un triangulo completo. Entonces es válido decir que $w = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64$; La longitud aproximada es de 64m.

Por lo tanto: t_u=(51m) : (7m/s) ≈ 7,3s, t_w=(64m) : (2m/s) = 32s, y el tiempo completo necesario es de 39,3s.

d.) De Nuevo las longitudes ***u*** y ***w*** son según el teorema de Pythagoras:

$u = \sqrt{(50^2 + x^2)}$ y $w = \sqrt{(50^2 + (50 - x)^2)}$.

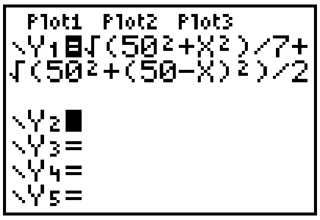
De esta forma se concluye que: t_u= $(\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)$, t_w=

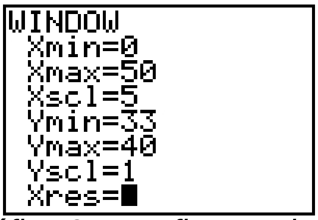
$(\sqrt{(50^2 + (50 - x)^2)}m) : (2m/s)$,

El tiempo completo necesario es:

t_{entero}=$[(\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)]$+$[(\sqrt{(50^2 + (50 - x)^2)}m) : (2m/s)]$.

e.) En el Gráfico 1 se muestra como se escribe la function. Luego en el paso dos se muestra como se configura el area determinante (0<x<50, escala en unidades 5, 33<y<40, escala en unidad 1)





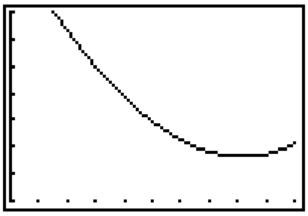
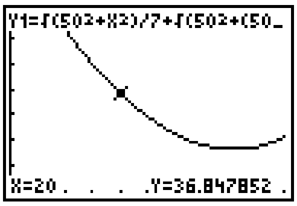


Gráfico 1: Escribir la función, Gráfico.2a: configurar el area, Gráfico 2b: trazado del gráfico

Este gráfico muestra el tiempo t (punto-y) que el salvavidas necesita si escoje el punto Q con distancia x hacia el punto H. p. ej:



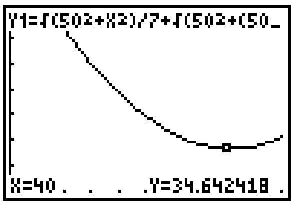


Gráfico.3a *Gráfico.3b*

Gráfico 3a: Si Q está a 20m de distancia del punto H, el salvavidas necesitara aproximadamente 36,8s.

Gráfico *3b: Si Q está a 40m de distancia al punto H, el salvavidas necesitará aproximadamente 34,6s.*

f.) El punto mínimo de la imagen puede ser calculada utiliyando una computadora. Como se observa en el Gráfico 4, el salvavidas es más rápido si escoje el punto Q a lo largo de la orilla la cual tiene una distancia aproximada de 40,815m del punto H. Entonces necesitará aproximadamente 34,6s.

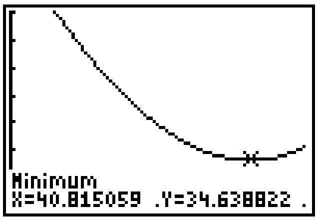
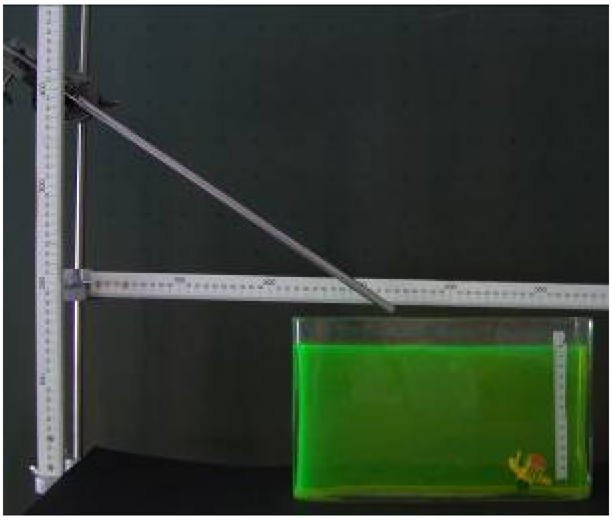


Gráfico 4: El punto mínimo de la curva fué determinado por computadora.

HT 2: El principio de Fermat

La luz no viaja siempre a la misma velocidad. La velocidad de la luz en el aire es de 300.000 km/s mientras que la velocidad de la misma en vidrio o en el agua es de 200.000 km/s y 225.000 km/s, respectivamente. Tambien la luz trabaja como un perfecto salvavidas. Esto significa que, un rayo de luz siempre encuentra el recorrido mas corto para partiendo de un punto A para llegar a un punto B. Este comportamiento de la luz es llamado el Principio de Fermat – llamado asi por Pierre de Fermat (1608-1665) quien haya sido el primero en descubrir esto.



Dibujo 1: El caracol en el agua.

Tarea:
Un caracol de agua quiere tener luz en su casa. Para ello, La luz del laser que se encuentra fuera del agua tiene que llegar directo al “techo” de la casa donde vive el caracol. (ver Dibujo 1).

a.) Si transferimos los mismos datos del dibujo 1 a un plano cartesiano tendríamos el laser en el punto L(0/40), la superficie del agua a lo largo de la trayectoria g con la ecuación y=14 y el techo de la casa del caracol sería el punto S(50/3) (Todas las medidas se toman en centímetros!). Dibuje un sistema de coordenadas y ubique L, g y S (escoja una escala proporcional).

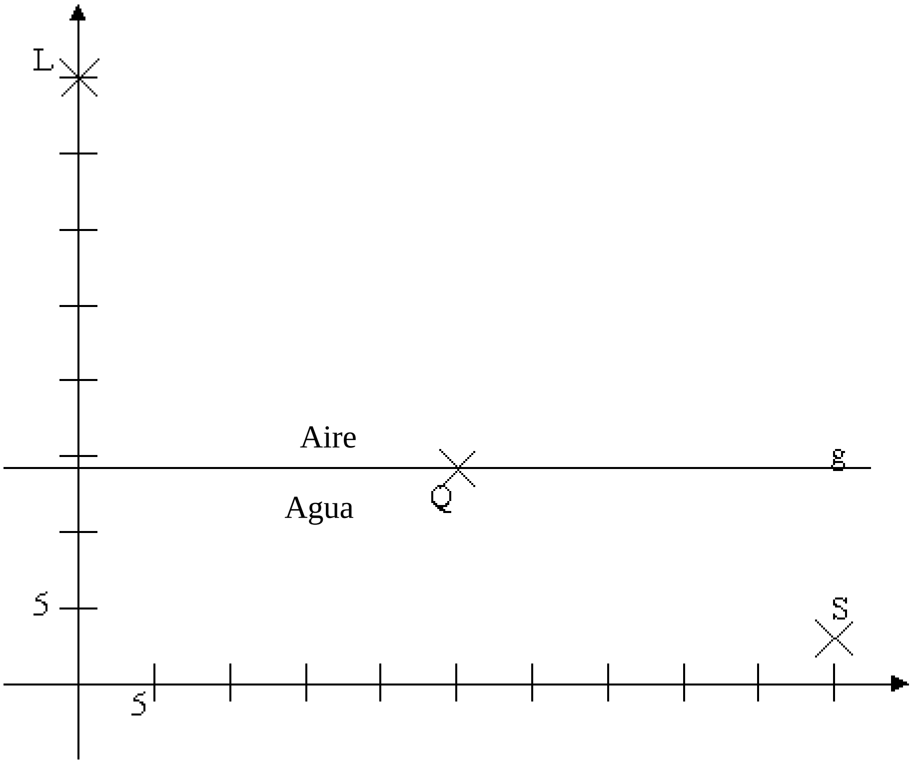
b.) El laser solo puede ser ubicado de al forma que el punto de encuentro con el agua es de Q(x/14). En su sistema de coordenadas del punto a, ponga un punto aleatorio Q.).

c.) ¿Dónde tiene que ponerse el punto Q de para que el laser viaje de forma mas rápida desde L hasta Q y desde Q hasta S?

d.) Con la ayuda del teorema del principio de Fermat, qué pasaría si el laser apuntara hacia el punto que consideramos en el punto c). Entonces que pasaría si calcularamos en c otro punto.

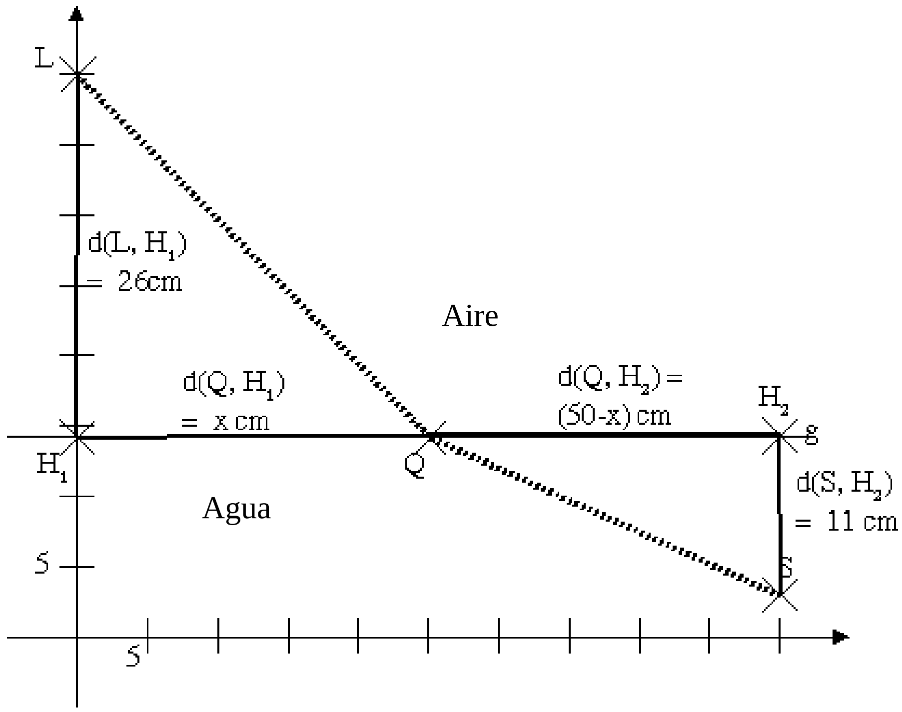
Solución a la hoja de trabajo 2

a.) y b.)



Dibujo.2: Soluciones para a.) y b.)

c.) Con la ayuda a la organización de lineas del Dibujo 3. La solución se hace mas fácil de comprender:



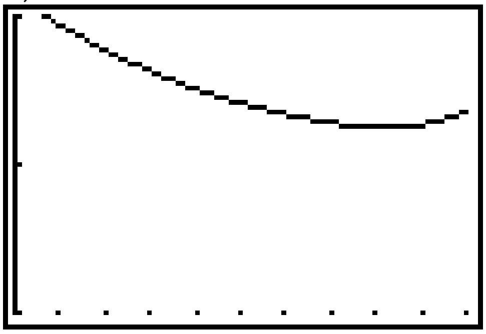
Dibujo .3 Líneas y cantidades adecuadas

La distancia de L a Q es de $\sqrt{26^2 + x^2}$. Como la distancia se toma sobre el aire entonces la velocidad de la luz del laser sería de 300.000.000 m/s = 30.000.000.000 cm/s. De esta forma el tiempo que demoraría la luz para viajar del punto L al punto Q es de t_1 = $\sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000$ segundos.

La distancia de Q a S es de $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2}$. Como esta distancia es sobre el agua , la luz en el agua se desplaza a una menor velocidad de (225.000.000 m/s = 22.500.000.000 cm/s) t_2= $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$ segundos.

Como resulato del tiempo requerido tenemos t_{requ} La luz necesita desplasarce desde L hacia S via Q la dependecia t_{total} (x)= $\sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000$ + $\sqrt{11^2 + (50 - x)^2} / 22.500.000.000$ (en segundos) .

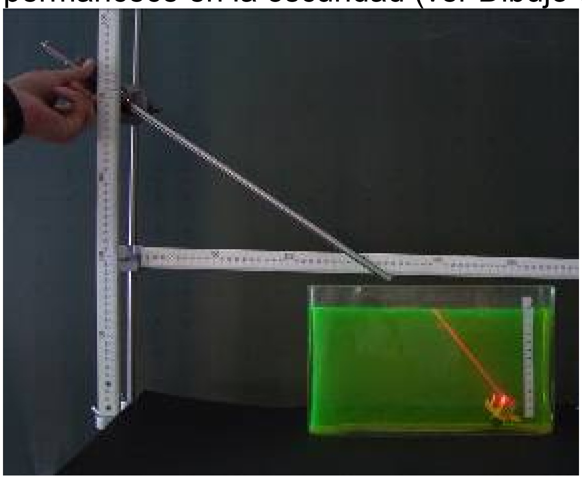
En la computadora se puede ver la imagen de la fórmula t_{requ} solo si se escoge un area adecuada. En el dibujo 4 se escoje 0 < x < 50 como tambien 0,000000001 < y < 0,000000003.

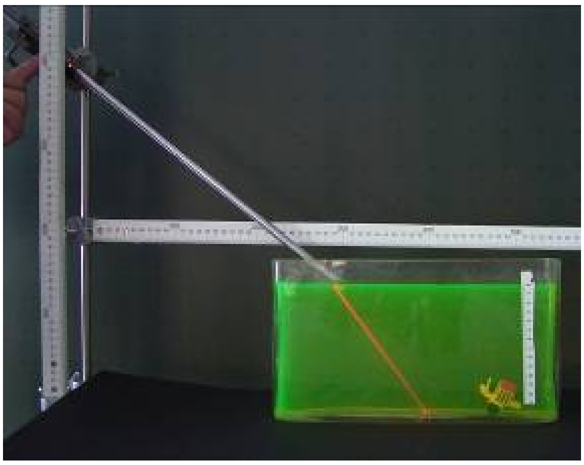


Dibujo .4 impresión de la función $t_{requ.}$

<u>El cálculo del punto bajo t - con la ayuda del computador - es aproximadamente **Q(41/14)** para el camino mas rápido.</u>

d.) Si el laser vuelve a apuntar el “techo” del caracol en el punto Q(41/41) va a terminar golpeando el punto S (ver el Dibujo 6a). En cualquier otro punto de Q el rayo de luz “se pierde” de tal fomra que el punto S no es encontrado y el techo de la casa del caracol permancece en la oscuridad (ver Dibujo 6b).





Fibujo 6 La casa del caracol es iluminada o permanece oscura