Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Unterrichtsmaterial

Unterrichtsvorschlag

Einführung des Prinzips von Fermat mit dem Rettungsschwimmerproblem

Unter dem Rettungsschwimmerproblem versteht man die Schwierigkeit, den schnellsten Weg zu finden, wenn man als Rettungsschwimmer vom Strand aus in einer seitlich versetzten Position im Meer eine verunglückte Person sieht. Da man im Land schneller ist als im Wasser, führt der schnellste Weg nicht geradlinig zur Person, sondern man wird im Vergleich zum direkten Weg länger an Land laufen, bevor man ins Wasser geht. Aus dem Prinzip von Fermat folgt, dass sich das Licht wie ein perfekter Rettungsschwimmer verhält. Aufgrund seiner Anschaulichkeit ist dieses Problem als Einstieg sehr gut geeignet. Zuerst widmet man sich dabei dem rein mathematischen Minimierungsproblem.

Da damit zu rechnen ist, dass aufgrund der noch fehlenden Analysis sehr wenige bis gar keine Extremwertprobleme behandelt wurden, sollte der Einstieg zunächst sehr eng geführt sein. Dies kann dadurch geschehen, dass Schritt für Schritt die Zeit des Rettungsschwimmers für einen selbst gewählten konkreten Weg berechnet wird (vgl. Arbeitsblatt 1). Hierbei wird nochmals der für die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich neue Inhalt „Satz des Pythagoras“ angewendet. Erst dann wird die Aufmerksamkeit auf die variable Stelle, an der der Rettungsschwimmer ins Wasser wechselt, gelenkt und so die Zielfunktion der vom Rettungsschwimmer benötigten Zeit aufgestellt. Während nun der Graph der Zielfunktion betrachtet wird, wird seine Aussage überlegt und so das Bedürfnis nach der Berechnung des Tiefpunktes geweckt.

Die Ergebniskontrolle des ersten Arbeitsplans kann gemeinsam erfolgen, sie kann aber auch durch Aushang der Lösungen stattfinden (vgl. Lösungen zum Arbeitsblatt 1), wenn die Klasse mit diesem Vorgehen vertraut ist. Dabei können die Schülerinnen und Schüler schon Ergebnisse der Teilaufgaben abgleichen oder sich bei eventuellen Schwierigkeiten einen Teil der Lösung abholen, mit dem sie dann weiterrechnen können. Die einzelnen Teillösungen könnten zum Beispiel an verschiedenen Orten im Klassenzimmer aufgehängt werden, so dass eine vollständige Einsichtnahme erschwert wird. Noch weiter differenzieren könnte man diese Methode, indem man den Schülergruppen mit Schwierigkeiten lediglich einen (ausformulierten) Lösungshinweis gibt, bevor sie die Lösung einsehen (dürfen). Auch diese Lösungshinweise könnten ausgehängt werden.

In einem zweiten Teil wird den Schülerinnen und Schülern nun die Gelegenheit gegeben, sich mit dem soeben beschrittenen Lösungsweg nochmals auseinander zu setzen. Dadurch haben insbesondere die Schülerinnen und Schüler, die den ersten Teil nicht selbstständig lösen konnten die Chance, direkt zu überprüfen ob sie den Lösungsweg so weit verstanden haben, dass sie nun in der Lage sind, eine ähnliche Aufgabenstellung selbst zu lösen. Das Prinzip von Fermat wird den Schülerinnen und Schülern in der Form „Licht verhält sich wie ein perfekter Rettungsschwimmer“ vorgegeben. Sie erhalten dann neben den Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Wasser eine Versuchsbeschreibung mit einer Lichtstrahlquelle (Laserpointer) in Luft und einem Objekt unter Wasser. Die Aufgabe ist es, den Punkt zu berechnen, der mit dem Laserpointer anvisiert werden muss, um das Objekt zu treffen (vgl. Arbeitsblatt 2). Natürlich sollte zur Kontrolle der Ergebnisse später eine Versuchsdurchführung nicht fehlen (vgl. Lösungen zum Arbeitsblatt 2).

Im Anschluss an diese beiden Arbeitspläne bieten sich sowohl mathematische als auch physikalische Diskussionen im Klassenplenum an: Mathematisch kann das Vorgehen nochmals strukturiert besprochen werden, um eine Art „Kochrezept“ für spätere Extremwertprobleme zu erhalten. Physikalisch sollte diese eine Berechnung verallgemeinert werden und somit die Lichtbrechung beim Übergang eines Lichtstrahls von optisch verschieden dichten Medien als Folge formuliert werden, um so auch Alltagsphänomene beim Blick ins Wasser zu erklären. Wichtig ist es dann aber auch, die Folgerung der Reflexionseigenschaft „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“ aus eben dem gleichen Prinzip zu erörtern.

Benötigtes Material

Das Experiment wird in dieser Einheit nur einmal benötigt, da es lediglich zur Kontrolle der Berechnungen dient. Für den Versuchsaufbau sind notwendig (vgl. Abbildungen):
1 Glasgefäß (mindestens 40cm lang und 30cm hoch), 1 Laserpointer, 1 „Schnecke“ oder vergleichbares Zubehör, Stativmaterial, Maßbänder

Arbeitsblätter (siehe folgende Seiten)

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

WS 1: **Das Rettungsschwimmer- Problem**

Der Rettungsschwimmer Mitch steht vor seinem Turm und sieht im Wasser eine Person in Not. Auf direktem Wege zum Wasser sind es 50m. Von dort aus befindet sich die Person nochmals 50m geradeaus weiter und dann 50m südlich (Abb.1). Mitch weiß, dass er am Ufer 7m/s schnell ist und im Wasser nur 2m/s. Um schnellstmöglich zur Person zu gelangen, rennt er deshalb zuerst am Ufer
auf geradem Weg zu einem Punkt Q, von wo aus er direkt zur Person schwimmt. Er legt dabei am Ufer u Meter zurück und im Wasser w Meter.

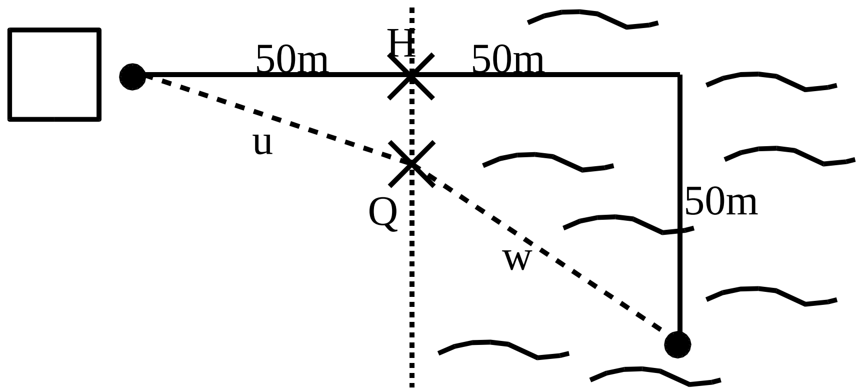


Abb. 1

a.) Wie lange würde er benötigen, wenn er zuerst 50m direkt zum Wasser rennen (also zum Punkt H) und dann die ca. 71m lange Strecke zur Person schwimmen würde?

b.) Er könnte ja auch bis zu dem Punkt rennen, von dem aus er senkrecht zum Ufer zur Person schwimmen kann. Dies entspricht dann ca. 71m an Land und genau 50m im Wasser. Wie lang benötigt er dafür?

c.) Stelle dir nun vor, du bist der Rettungsschwimmer. Wähle (blitzschnell) einen Punkt Q beliebig zwischen den beiden Extremen aus a.) und b.) so aus, dass du deiner Meinung nach möglichst schnell bei der Person bist.
Berechne dann die Streckenlängen u und w (s. Abb. 1), sowie die für diese beiden Streckenlängen benötigten Zeiten t_u und t_w. Berechne damit die insgesamt benötigte Zeit t_{ges} bis zur Person. Vergleiche mit deinen Nebensitzern. Wer ist am schnellsten?

d.) Ein Rettungsschwimmer hat den Punkt Q so gewählt, dass er im Abstand x zum Punkt H liegt. Berechne t_{ges} in Abhängigkeit von x.
Tipp: Berechne schrittweise dieselben Größen wie in c.), nun eben jeweils in Abhängigkeit der Variablen x.

e.) Das Ergebnis aus d.) ergibt einen Funktionsterm t(x). Betrachte das Schaubild der zugehörigen Funktion im Rechner. Wähle dazu ein geeignetes Koordinatensystem. Schreibe dann auf, was du allgemein aus diesem Schaubild ablesen kannst und gib ein paar Beispiele an.

f.) Bestimme den Abstand x so, dass der Rettungsschwimmer am schnellsten ist.

Lösungen

a.) Bis zum Ufer benötigt er (50m) : (7m/s) ≈ 7,1s. Dann bis zur Person (71m) : (2m/s) ≈ 35,5s. Insgesamt benötigt er also 42,6s.

b.) Auf diesem Weg würde er an Land (71m) : (7m/s) ≈ 10,1s und im Wasser (50m) : (2m/s) = 25s, insgesamt also 35,1s benötigen.

c.) <u>Beispiel: Der Punkt Q, der von H 10m entfernt liegt</u>

Aus dem Satz des Pythagoras folgt $u = \sqrt{(50^2 + 10^2)} \approx 51$, also ist u ca. 51m lang. Auch die Länge w kann man mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Da man weiß, dass die Gesamtlänge nach unten 50m sind, der Punkt Q 10m Abstand von H hat, hat er 40m Abstand von dem Punkt am Ufer, der mit Q und der Person ein rechtwinkliges Dreieck vervollständigt. Somit gilt $w = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64$, die Länge w beträgt also ca. 64m.

Damit folgt: t_u=(51m) : (7m/s) ≈ 7,3s, t_w=(64m) : (2m/s) = 32s, die gesamte benötigte Zeit beträgt somit 39,3s.

d.) Wieder folgen die Längen u und w aus dem Satz des Pythagoras:
$u = \sqrt{(50^2 + x^2)}$ und $w = \sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}$.

Damit folgt: $t_u = (\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)$, $t_w = (\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m) : (2m/s)$, die gesamte benötigte Zeit beträgt somit t_{ges}= $[(\sqrt{(50^2 + x^2)}m) : (7m/s)]$ + $[(\sqrt{(50^2 + (50-x)^2)}m) : (2m/s)]$.

e.) Die Eingabe der Funktion erfolgt im GTR wie es in Abb.1 zu sehen ist. Abb. 2 zeigt den Graph für einen geeignet gewählten Achsenbereich (0<x<50, Skaleneinheit 5, 33<y<40, Skaleneinheit 1)

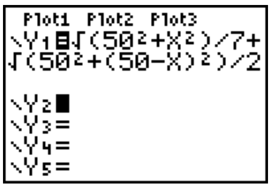


Abb.1: Eingegebene Funktion

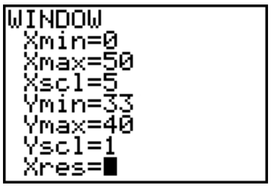


Abb.2a: gewählter Achsenbereich

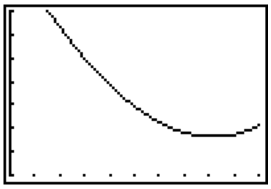


Abb. 2b: zuge höriger Graph

Aus diesem Graph kann man die Zeit t (y-Wert) ablesen, die der Rettungsschwimmer benötigt, wenn er den Punkt Q mit der Distanz x zum Punkt H wählt. Beispiel:

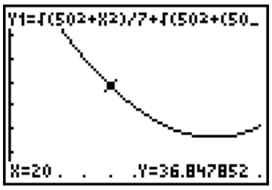
Abb.3a


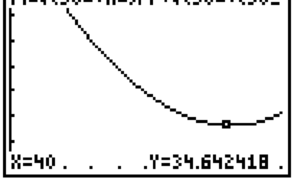
Abb.3b


Abb.3a Wenn Q 20m entfernt von H liegt, benötigt der Rettungsschwimmer ca. 36,8s
Abb. 3b: Wenn Q 40m entfernt von H liegt, benötigt der Rettungsschwimmer ca. 34,6s

f.) Mit dem Rechner kann man das Minimum auf dem Schaubild berechnen. Wie in Abb.4 zu sehen ist der Rettungsschwimmer am schnellsten, wenn er den Punkt Q entlang der Wasserlinie in ca. 40,815m Entfernung zum Punkt H wählt. Er benötigt dann ca. 34,6s.

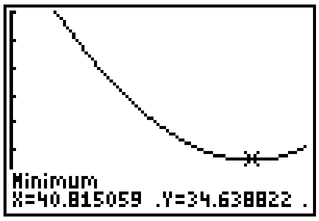


Abb.4: Mit dem Rechner wurde der tiefste Punkt auf der Kurve bestimmt

WS 2: **Das Prinzip von Fermat**

Licht ist nicht überall gleich schnell. Zum Beispiel beträgt die Lichtgeschwindigkeit in Luft ca. 300.000 km/s. In Glas ist das Licht dagegen nur ungefähr 200.000 km/s und in Wasser ca. 225.000 km/s schnell. Außerdem verhält sich Licht immer wie ein perfekter Rettungsschwimmer, d.h. ein Lichtstrahl verläuft von einem Punkt A zu einem Punkt B stets auf dem zeitlich kürzesten Weg für das Licht. Dieses Verhalten von Licht nennt man das Prinzip von Fermat, benannt nach Pierre de Fermat (1608 – 1665), der es erstmals formulierte.

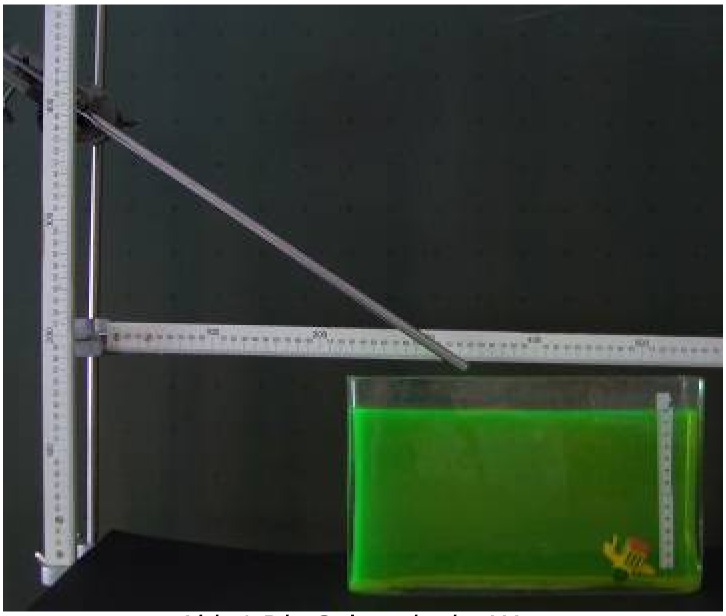


Abb.1 Die Schnecke im Wasser

Aufgabe:
Eine kleine Wasserschnecke möchte Licht in ihrem Haus haben. Dazu soll der Lichtstrahl eines Laserpointers außerhalb des Wassers genau in das Dach fallen (s. Abb.1).

a.) Wenn man die Anordnung in Abb.1 vermisst und in ein kartesisches Koordinatensystem überträgt, so erhält man den Laserpointer im Punkt L(0/40), die Wasserlinie entlang der Geraden g mit der Gleichung y=14 sowie das Dach des Schneckenhauses im Punkt S(50/3) (alle Angaben in Zentimeter!). Zeichne ein Koordinatensystem und trage L, g und S ein (wähle einen geeigneten Abbildungsmaßstab).

b.) Der Laserpointer kann nun so ausgerichtet werden, dass sein Lichtstrahl im Punkt Q(x/14) ins Wasser trifft. Zeichne einen beliebigen Punkt Q in das Koordinatensystem aus a.) ein.

c.) Wo muss der Punkt Q liegen, damit das Licht auf seinem Weg von L nach Q und weiter von Q nach S zeitlich am schnellsten ist?

d.) Überlege dir mithilfe des Prinzips von Fermat was passieren wird, wenn man den Laserpointer auf den in c.) berechneten Punkt richtet und was passiert, wenn ein anderer als der in c.) berechnete Punkt anvisiert wird.

Musterlösung zu AB 2
a.) und b.)

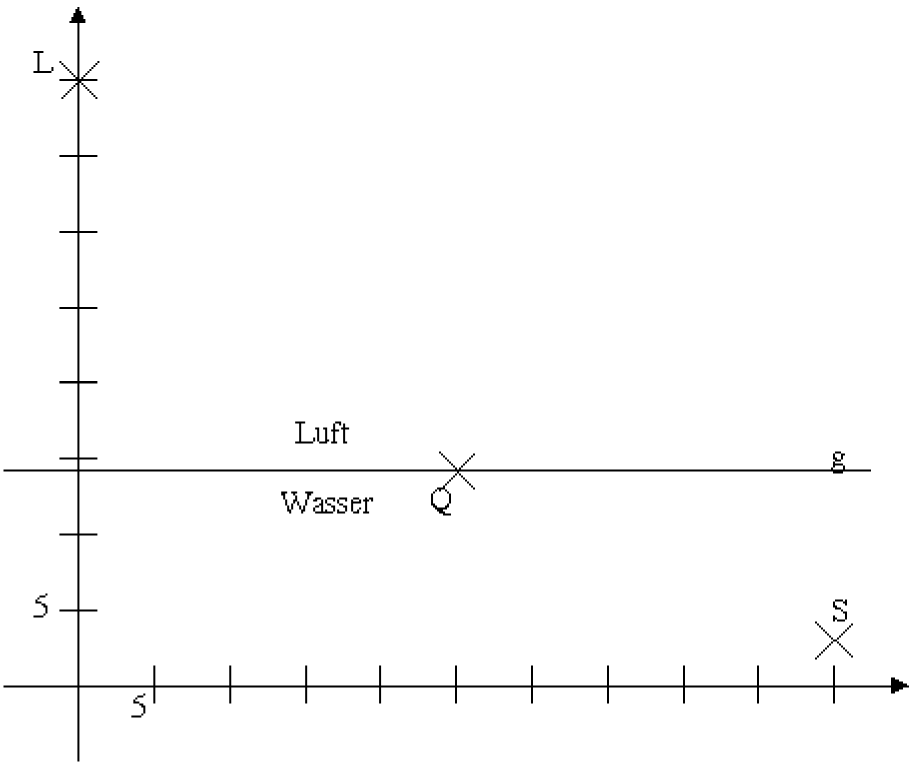


Abb.2: Lösung zu a.) und b.)

c.) Mit den in Abb. 3 erkennbaren Hilfslinien und Größen wird die Lösung klarer:

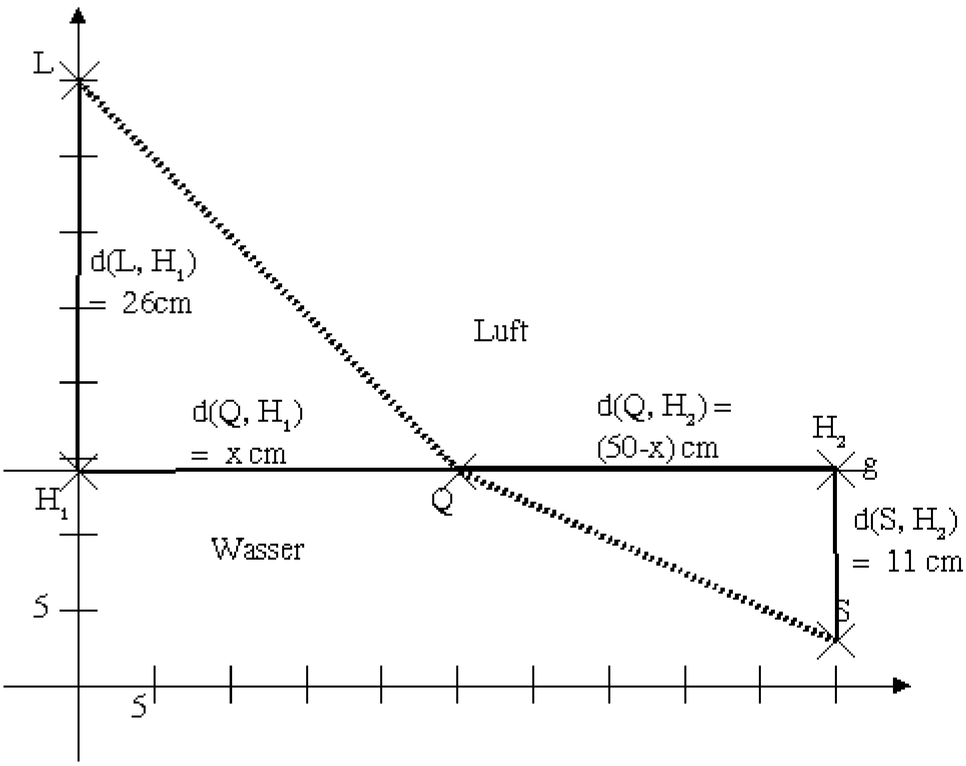


Abb. 3 geeignete Hilfslinien und Größen

Der Weg zwischen L und Q hat die Länge $\sqrt{26^2 + x^2}$. Da der Weg in Luft ist, hat das Licht hier eine Geschwindigkeit von 300.000.000 m/s = 30.000.000.000 cm/s. Somit benötigt das Licht auf dem Weg von L nach Q die Zeit t_1 = $\sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000$ Sekunden.

Der Weg von Q nach s hat eine Länge von $\sqrt{11^2 + (50-x)^2}$, hier benötigt das Licht aufgrund seiner Lichtgeschwindigkeit im Wasser (225.000.000 m/s = 22.500.000.000 cm/s) die Zeit t_2= $\sqrt{11^2 + (50-x)^2} / 22.500.000.000$ Sekunden.

Für die vom Licht auf dem Weg von L über Q nach S benötigte Zeit t_{ges} ergibt sich die Abhängigkeit t_{ges} (x)= $\sqrt{26^2 + x^2} / 30.000.000.000 + \sqrt{11^2 + (50-x)^2} / 22.500.000.000$ (in Sekunden).

Im Rechner erkennt man das Schaubild dieser Funktion t_{ges} erst bei geeignet gewähltem Bereich. In Abb. 4 wurde 0 < x < 50 sowie 0,000000001 < y < 0,000000003 gewählt.

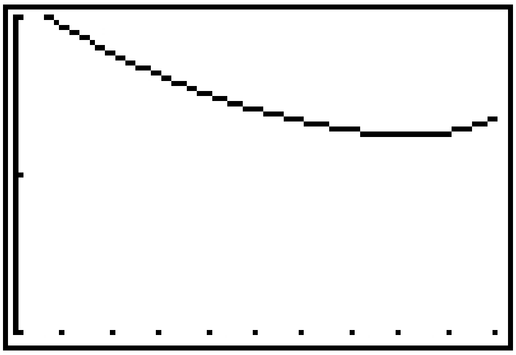
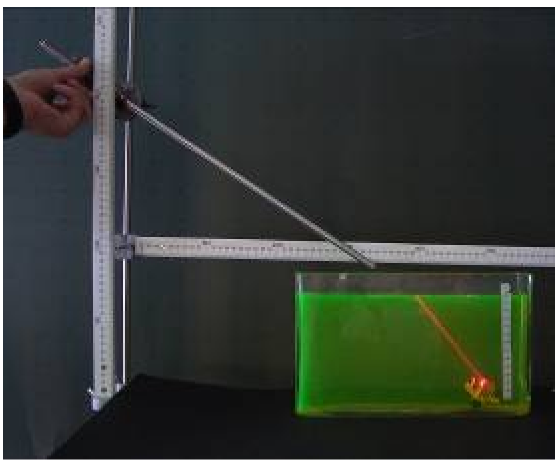


Abb.4 Schaubild der Funktion t_{ges}

<u>Die Berechnung des Tiefpunktes mithilfe des Rechners ergibt ungefähr für **Q(41/14)** den schnellsten Weg.</u>

d.) Falls man den Strahl des Laserpointers ungefähr auf den Punkt Q(41/14) richtet, trifft man das Dach des Schneckenhauses im Punkt S (vgl. Abb.6a). An jedem anderen Punkt Q (vgl. Abb. 6b) nimmt der Lichtstrahl einen Verlauf ein, so dass S nicht erreicht wird. Es bleibt dunkel im Schneckenhaus.



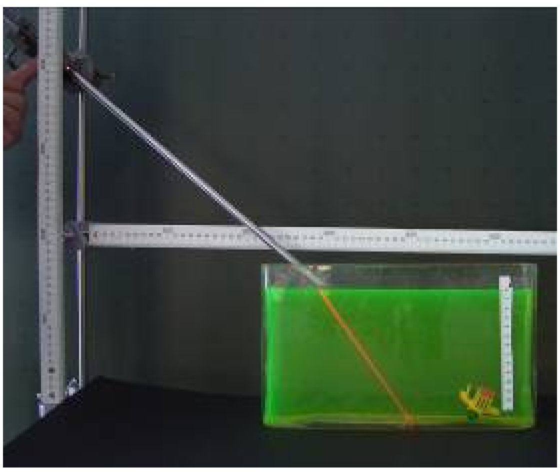


Abb.6 Das Schneckenhaus wird erleuchtet oder bleibt dunkel