Unterrichtsmaterial

Unterrichtsvorschlag

Für die unterrichtliche Umsetzung wird ein Stationenlauf zum Thema Schwerpunkt/ Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck vorgeschlagen. Die Stationen sind so auszuwählen, dass sie den Begriff Schwerpunkt technisch-physikalisch nahe bringen, gleichzeitig aber auch das mathematische Modell enthalten. Die folgenden Vorschläge berücksichtigen dies.

Um die verschiedenen Aspekte des Schwerpunktsbegriffs, die in den unterschiedlichen Stationen erfahren werden, zu vernetzen, sollte jede Gruppe ein Poster für eine abschließende Präsentation im Klassenverband erstellen. Denkbar ist auch eine Erweiterung durch ein Webquest zum Thema Schwerpunkt, wodurch in die abschließende Präsentation weitere Informationen einfließen könnten.

In höheren Klassenstufen könnten Schwerpunkte von Flächen und Körpern zusätzlich rechnerisch bestimmt werden, zum Beispiel mit Hilfe der Integralrechnung, wenn die begrenzende Funktion f(x) bekannt ist.

Darüber hinaus kann die Thematik erweitert werden durch Experimente zu physikalischen Phänomenen, die Zusammenhänge zwischen Stabilität, Lage des Schwerpunkts und Unterstützung zeigen.

Stationen (vgl. folgende Seiten):

- **Station Hängeverfahren**
- **Station Wiegeverfahren**
- **Station Symmetrieachsen**
- **Station Flächen**
- **Station – mathematische Schwerpunktbestimmung mit dem Computer**
- **Station Pappflächen**

Erweiterungsmöglichkeit bzw. Alternativvorschlag für die Sekundarstufe II:

- **Arbeitsblatt: Schwerpunkt bei Flächen und Körpern**

Erweiterungsmöglichkeit:
Zusammenhang zwischen Stabilität und Lage des Schwerpunkts

- **Station(en): Phänomene**

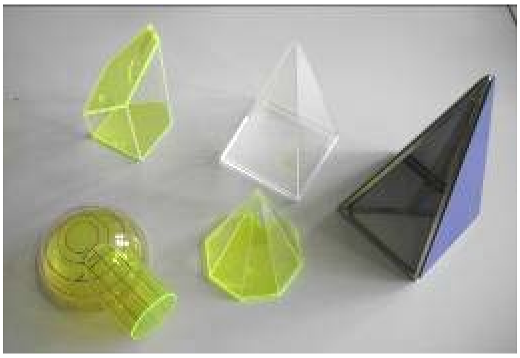
Station Hängeverfahren

Inhalt und Zielsetzung:
Ermittlung des Schwerpunkts verschiedener Körper durch das Hängeverfahren

Material:
Verschiedene Körper, möglichst mit vorbereiteten Anhängevorrichtungen/ Fäden.

> Gut eignen sich Duplo-Spielsteine, da sich hieraus unkompliziert zahlreiche unterschiedliche Körper zusammensetzen lassen und der Faden zur Aufhängung zwischen zwei Steine geklemmt werden kann. Vorteilhaft sind auch hohle, durchsichtige Körper, da bei ihnen der Schwerpunkt auch im Körperinnern ermittelt werden kann, etwa durch Strohhalme, die frei an der Aufhängung angebracht werden. Andererseits kann auch das Ausmessen von Gegenständen aus dem Privatbesitz der Schülerinnen und Schüler motivierend sein.

Faden,
Lineal, Klebeband, Bleistift oder Filzstift bzw. Strohhalme zum Markieren der Schwerelinien

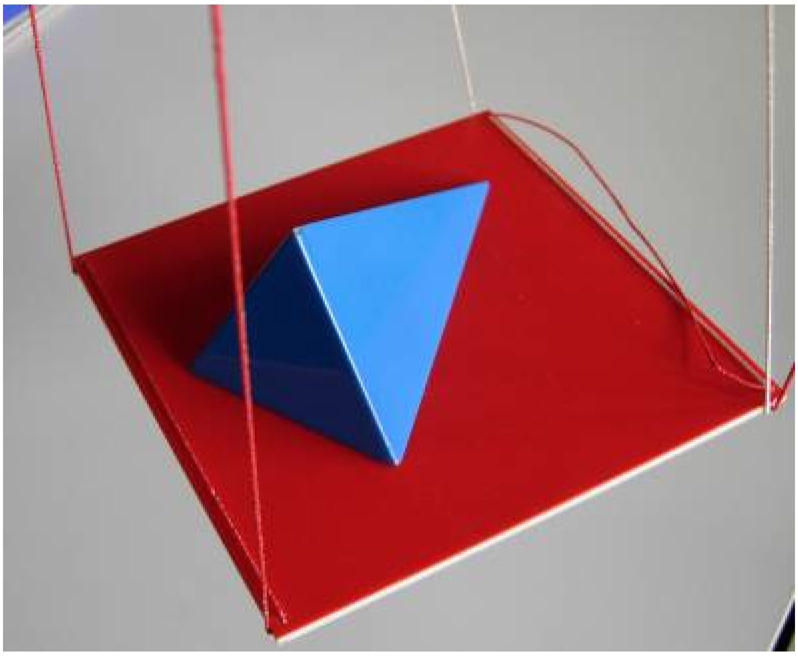




Durchführung:
Die Körper werden in verschiedenen (mindestens zwei) Positionen aufgehängt, die Schwerelinie jeweils eingezeichnet oder durch Klebeband markiert und der Schwerpunkt als Schnittpunkt der Schwerelinien ermittelt.

Station Wiegeverfahren

Inhalt und Zielsetzung:
Ermittlung des Schwerpunkts verschiedener Körper durch das Wiegeverfahren

Material:
Verschiedene Körper,
eine Hängewaage: zum Beispiel ein Brett zum Auflegen der Körper mit Fäden zum Anhängen, ggf. Stativ zum Dranhängen,
Lineal, Klebeband, Bleistift oder Filzstift bzw. Strohhalme zum Markieren der Schwerelinien

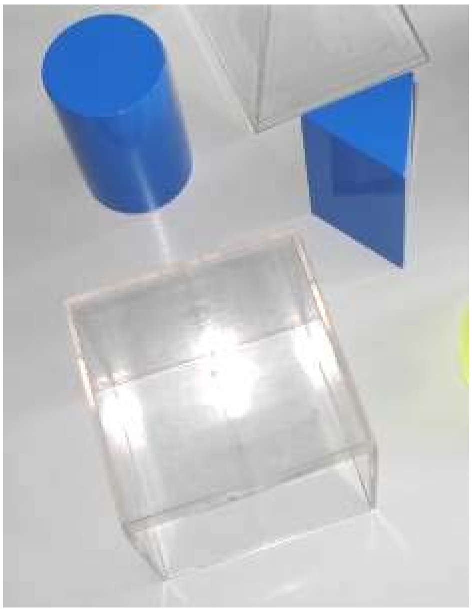


Durchführung:
Die Körper werden in verschiedenen (mindestens zwei) Positionen auf die Hängewaage gelegt, die Schwerelinie jeweils eingezeichnet und der Schwerpunkt als Schnittpunkt der Schwerelinien ermittelt.

Station Symmetrieachsen

Inhalt und Zielsetzung:
Ermittlung des Schwerpunkts verschiedener Körper durch das Hängeverfahren, Symmetrieachsen als Schwerelinien erkennen.

Material:
Verschiedene achsensymmetrische Körper mit mehr als einer Symmetrieachse, möglichst mit vorbereiteten Anhängevorrichtungen (Haken) an den Symmetrieachsen,
Faden,
Lineal, Klebeband, Bleistift oder Filzstift bzw. Strohhalme zum Markieren der Schwerelinien



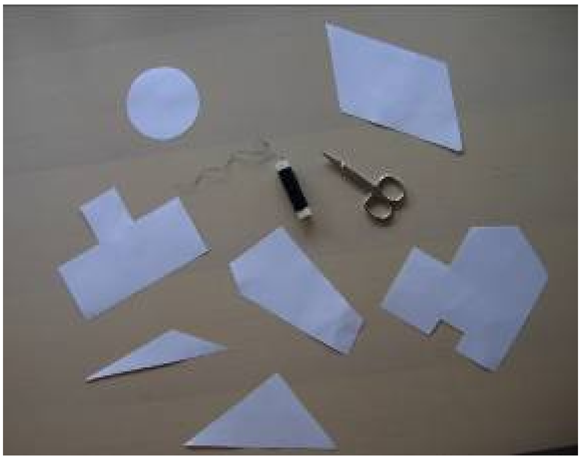
Durchführung:
Die Körper werden in verschiedenen Positionen an den Haken so aufgehängt, dass die Symmetrieachsen die Schwerelinien sind. Die Schwerelinien werden jeweils eingezeichnet und der Schwerpunkt als Schnittpunkt der Schwerelinien ermittelt.

Erweiterung:
Verschiedene achsensymmetrische Körper und Aufhängevorrichtungen (Kleber, Haken usw.) werden bereitgestellt. Nachdem jeweils die Lage der Symmetrieachsen erkannt wurde, werden an den Symmetrieachsen die Haken eingedreht. Anschließend geschieht die Schwerpunktbestimmung mit dem Hängeverfahren.

Station Flächen

Inhalt und Zielsetzung:
Ermittlung des Schwerpunkts verschiedener Flächen durch das Hängeverfahren.
Auch: Symmetrieachsen (soweit vorhanden) als Schwerelinien erkennen.

Material:
Verschiedene Flächen aus dickem Papier mit vorbereiteten Fäden zum Aufhängen, ggf. Schere zum Lochen der Papierflächen.



Durchführung:
Die Flächen werden in verschiedenen Positionen aufgehängt, die Schwerelinie jeweils eingezeichnet und der Schwerpunkt als Schnittpunkt der Schwerelinien ermittelt.
Tipp: Wenn man die Flächen vor einer festen Wand aufhängt, kann man die Schwerelinien besser einzeichnen.

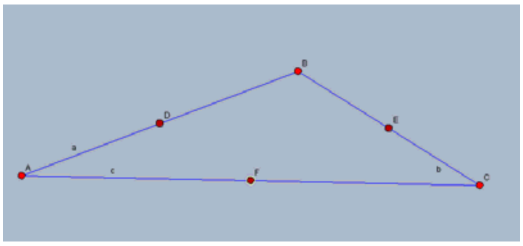
Durch Ausbalancieren auf dem Zeigefinger wird die Lage des Schwerpunkts bestätigt.

Idee: Astrid Beckmann,
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Deutschland

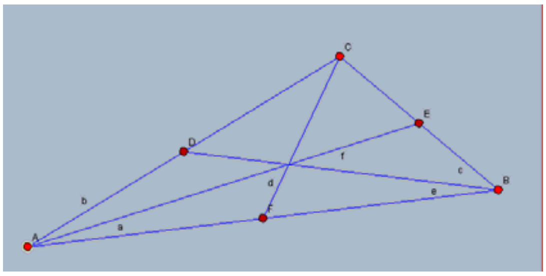
Station – mathematische Schwerpunktbestimmung am Computer (mit dynamischen Geometriesystemen)

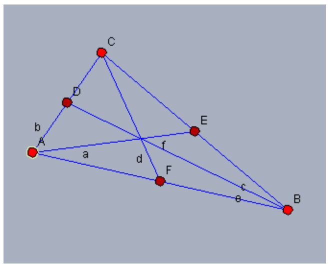
Inhalt und Zielsetzung:
Mit Hilfe eines dynamischen Geometriesystems wird folgende Invarianz erkannt: Im Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt. Es handelt sich um den Schwerpunkt des Dreiecks.

Material:
Computer mit installiertem Geometrieprogramm,
Aufgabe: Zeichne ein beliebiges Dreieck mit seinen Seitenhalbierenden. Was entdeckst du? (Hinweis: Verändere das Dreieck auch durch Ziehen an einem Punkt)
Oder: vorbereitete Datei mit Dreieck und Mittelpunkten der Seiten (vgl. Abbildung, hier: Cinderella).



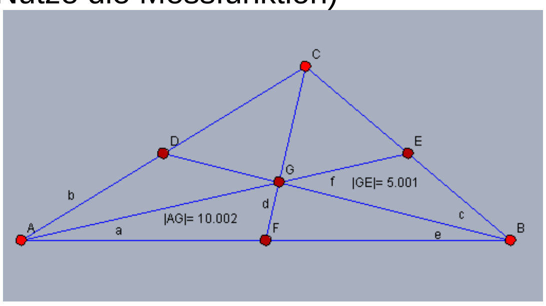
Durchführung:
Die Grundkonstruktion wird durch die Seitenhalbierenden erweitert. Das Dreieck wird beliebig verändert. Dabei kann entdeckt werden, dass sich die Seitenhalbierenden stets in einem Punkt schneiden.





Erweiterungen:
Aufgabe: Drucke ein beliebiges Dreieck aus, klebe es auf Pappe und balanciere das Dreieck auf deinem Zeigefinger. In welchem Punkt musst du das Dreieck unterstützen, damit es im Gleichgewicht bleibt (Schwerpunkt)?

Aufgabe: Entdecke weitere Zusammenhänge. In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden? (Nutze die Messfunktion)

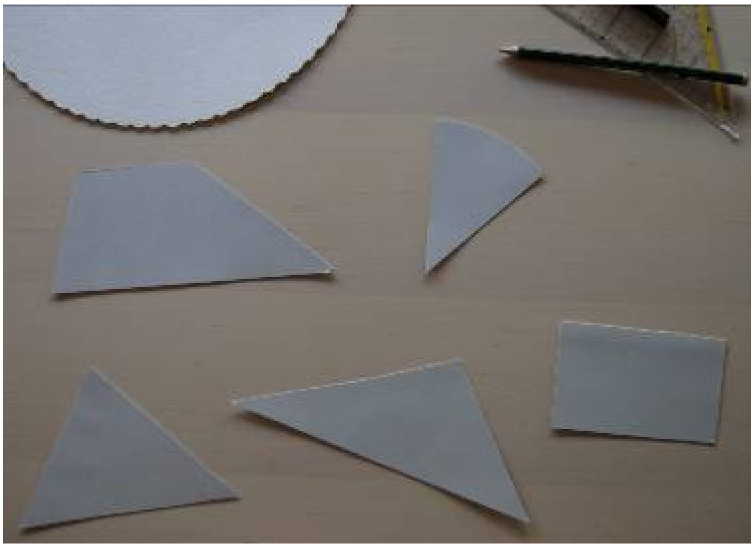


Aufgabe:
Begründe, dass sich die drei Seitenhalbierenden stets in einem Punkt schneiden.
Hinweis: Strecke die Seiten an G (Schwerpunkt) mit dem Streckfaktor 0,5.

Station – Pappflächen

Inhalt und Zielsetzung:
Ermittlung der Schwerpunkte verschiedener Flächen, Beschreibung der Lage und Überprüfung der Richtigkeit

Material:
Verschiedene Pappflächen,
Bleistift und Lineal, ggf. Pappe zum Ausschneiden weiterer eigener Flächen



Durchführung:
Der Flächenschwerpunkt wird zeichnerisch (ggf. auch experimentell) ermittelt (auf Grund der Kenntnisse aus den vorangegangenen Experimenten).
Die Lage wird festgestellt und über die Flächengrößen beschrieben. Zum Beispiel: Der Schwerpunkt im Dreieck ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Die Richtigkeit der Lage wird überprüft, indem der Körper an diesem Schwerpunkt aufgehängt oder unterstützt wird. Zum Beispiel: Das Dreieck wird im Schwerpunkt auf dem Zeigefinger balanciert.

Erweiterung bzw. Alternativvorschlag für die Sekundarstufe II

Hinweis: Alle Aufgaben zu diesem Alternativvorschlag finden sich zusammengefasst als Kopiervorlage auf S. 20

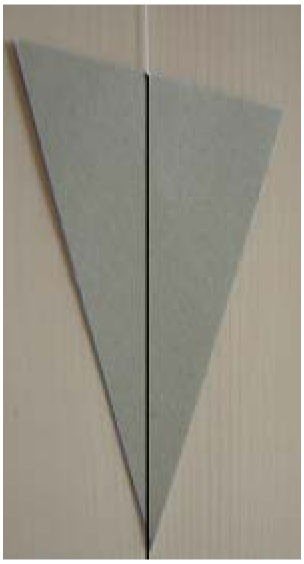
Allgemeine Aufgabe:

Bestimme die Lage des Schwerpunkts im Dreieck, Viereck, im Würfel, bei der Pyramide usw.

Arbeitsauftrag 1: Schwerpunkt beim Dreieck

Material: Pappe, Schere

Aufgabe:
1. Schneide aus der Pappe ein Dreieck.
2. Zeichne in dein Pappdreieck die Seitenhalbierenden ein und balanciere anschließend das Dreieck im Schnittpunkt auf deinem Zeigefinger. Beobachte: Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden?
3. Hänge das Dreieck nun nacheinander an verschiedenen Punkten auf (an den Ecken oder Seiten) und zeichne jeweils die Schwerelinien ein (gemäß Abbildung, möglichst auf der Rückseite, die noch nicht bezeichnet ist). Balanciere das Dreieck dann im Schnittpunkt der Schwerelinien auf deinem Zeigefinger. Beobachte: Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Schwerelinien?
4. Bestätige die Gleichheit beider Schnittpunkte.

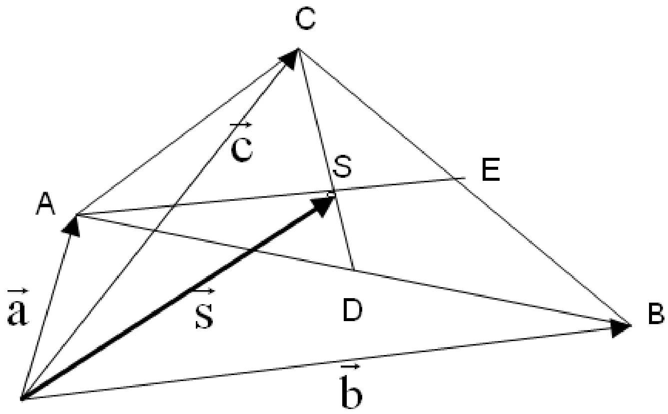


Arbeitsauftrag 2: Analytische Beschreibung des Schwerpunkts im Dreieck

Aufgabe: Ein beliebiges Dreieck ABC lässt sich über die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seiner Punkte A, B, und C beschreiben.

Drücke den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunkts S durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

Lösung:



In der folgenden Begründung wird ausgenutzt, dass der Schwerpunkt S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (hier: CD und AE) ist und dass die Seitenhalbierenden durch S im Verhältnis 1:2 geteilt werden, die Teilstrecken also 1/3 bzw. 2/3 der Seitenhalbierenden lang sind.

$$\begin{aligned}
\vec{s} &= \vec{a} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \\
&= \vec{a} + (-\vec{a} + \vec{c}) + \frac{2}{3}(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB)} \\
&= \vec{c} + \frac{2}{3}(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})) \\
&= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})
\end{aligned}$$

Arbeitsauftrag 3: Schwerpunkt beim Viereck

Material: Pappe, Schere, ein vorbereitetes Trapez gemäß Abbildung, Faden zum Aufhängen, eine Waage (bis mindestens 1/10 g).

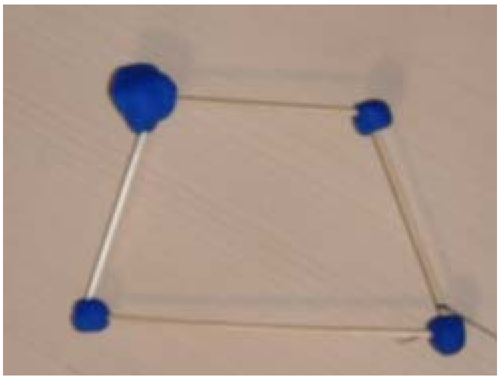


Abbildung
Vorbereitetes Trapez (möglichst mit den Maßen aus Aufgabe 1), bestehend aus einfachen Holzspießen und „Ecken" aus Knete. Mindestens eine Ecke sollte sich in der Masse deutlich von den anderen Ecken unterscheiden. Dies kann durch einen dickeren Knetklumpen erreicht werden, aber auch - besser noch – durch ein unsichtbares eingelassenes Metallkügelchen.

Aufgabe: Überprüfe, ob die folgende (zum Dreieck analoge) analytische Beschreibung des Schwerpunkts im Viereck allgemein gültig ist:

$$\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

Führe dazu folgende Aufträge aus:

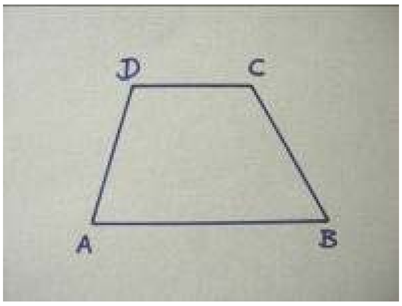
1. Zeichne das Trapez ABCD mit A(0/0), B(12/0), C(8/7) und D(2/7) auf die Pappe.
2. Berechne die Lage des Schwerpunkts auf Grund der oben angegebenen Gleichung.
3. Zeichne den Schwerpunkt auf Grund des Ergebnisses in das Papptrapez ein.
4. Überprüfe die Lage des Schwerpunkts im Pappdreieck experimentell durch die Hängemethode.
5. Überprüfe die Lage des Schwerpunkts im bereit liegenden Trapez ebenfalls mit der Hängemethode. Gib ungefähr die Koordinaten an. Was stellst du fest?
6. Der physikalische Schwerpunkt ist durch die folgende Gleichung gegeben.

   $$\vec{s} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k} \sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{x_i}$$

   m_i bezeichnet die Massen der Körperpunkte und x_i deren Lage.
   Erläutere die Gleichung und erkläre mit ihrer Hilfe die Beobachtungen aus den Experimenten.
7. Beantworte die oben gestellte Frage zur Allgemeingültigkeit der Gleichung für den Schwerpunkt im Viereck.

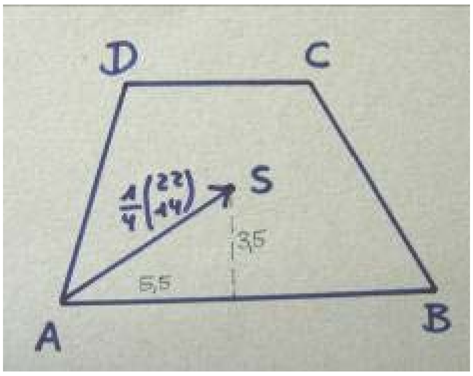
Lösungsideen zu Arbeitsauftrag 3:

1.

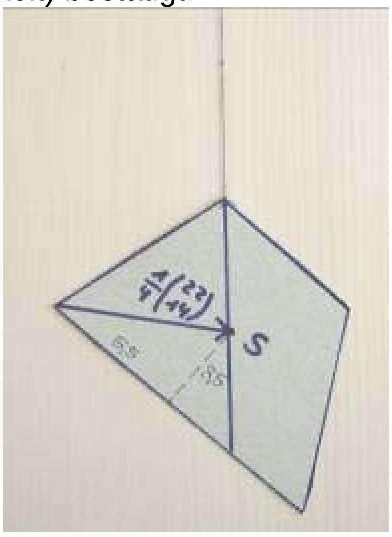


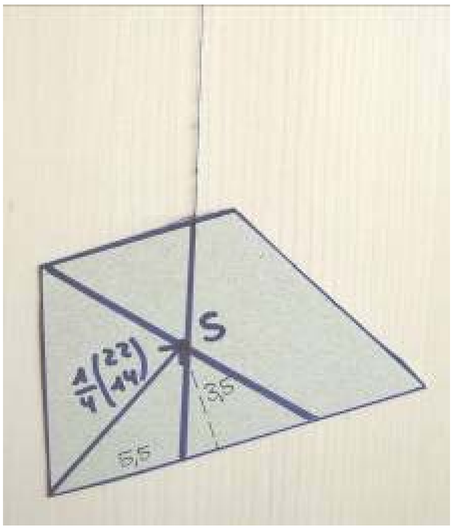
2. $\vec{s} = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}22\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5,5\\3,5\end{pmatrix}$, also S(5,5/3,5)

3.



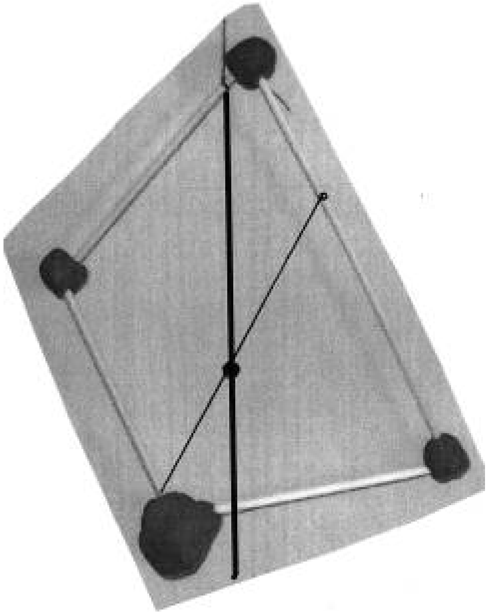
4. Mit dem Hängeverfahren wird die Lage des Schwerpunkts (im Rahmen der experimentellen Genauigkeit) bestätigt.





Fortsetzung: nächste Seite

5. Die Hängemethode ergibt, dass die Lage der Schwerpunkte bei Papptrapez und vorbereitetem Trapez (Holz. Knete) – trotz etwa gleicher Abmessungen der Trapeze – nicht übereinstimmt.
(Hinweis: Die Schwerelinien lassen sich hier in den verschiedenen Hängepositionen jeweils auf einem hinter das hängende Trapez gehaltene Blatt Papier mit einer Trapezfigur einzeichnen.)



Als Lage des Schwerpunkts ergibt sich hier im Beispiel ungefähr (4,7/4,0).

6. Die angegebene physikalische Formel legt nahe, die Massenverteilung beim vorgegebenen Trapez zu bestimmen. Näherungsweise kann dies über das Auswiegen der „Ecken“ erfolgen, ggf. unter Vernachlässigung der „Seiten“ (Holzverbindungen).
Beispiel:
Die Knetkugeln an den Ecken A, B und C haben die Massen $m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}1$ g, die Knetkugel an Ecke D hat eine Masse von $m_4 = 0{,}2$ g.
Dann ergibt sich für den Schwerpunkt:

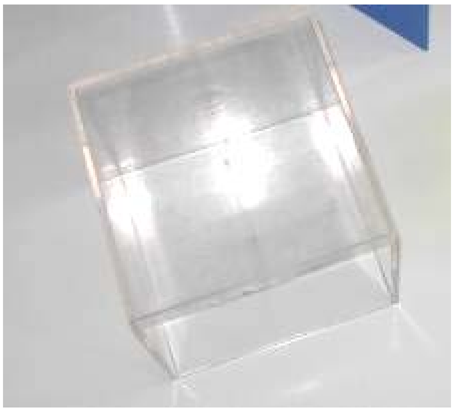
$$\vec{s} = \frac{1}{0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}2}\left(0{,}1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} + 0{,}2\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{0{,}5}\left(\begin{pmatrix}1{,}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}4\\1{,}4\end{pmatrix}\right) = 2\cdot\begin{pmatrix}2{,}4\\2{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}8\\4{,}2\end{pmatrix}$$

Also S(4,8/4,2) statt (5,5/3,5). Der Wert entspricht übrigens etwa dem Ergebnis im Beispiel in Aufgabe 5.

7. Die analytische Gleichung für den Schwerpunkt gilt für Vierecke mit gleichmäßiger Massenverteilung. $\vec{s} = \frac{1}{n \cdot m}\sum_{i=1}^{n} m \cdot \vec{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{x}_i$. Beispielsweise ergibt sich hieraus für vier gleiche Massen $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4)$.

Arbeitsauftrag 4: Schwerpunkt bei Körpern

Material: Würfel, Quader und Pyramide (ggf. weitere Körper), Faden zum Aufhängen, wenn möglich: Computer mit dem Programm Mathematica zur Konstruktion der dreidimensionalen Körper und Überprüfung der Schwerpunktlage (mit Animationsmöglichkeit).



Aufgabe: Bestimme den Schwerpunkt der bereit liegenden Körper. Stelle zunächst eine Vermutung auf und überprüfe die Vermutung anschließend

a) mit dem Hängeverfahren
b) physikalisch bzw. analytisch
c) am Computer.

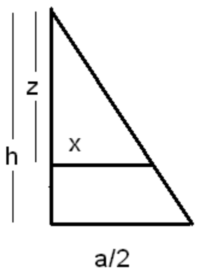
Lösungsansätze:

a) Die Hypothese, dass der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Symmetrieachsen ist, wird beim Würfel bestätigt. Bei der Pyramide liegt der Schwerpunkt ebenfalls auf der Symmetrieachse. Steht für das Experiment ein hohler und ein voller Körper zur Verfügung, kann festgestellt werden, dass sich die Schwerpunktlagen unterscheiden können. Beispielsweise liegt der Schwerpunkt bei einer Vollpyramide der Höhe h bei ¼ h, während er bei der Hohlpyramide von Grundfläche und Höhe abhängt.

b) Beim Vollkörper liegt eine gleichmäßige Massenverteilung vor, so dass der physikalische Schwerpunkt dem analytischen Schwerpunkt entspricht. Allerdings ist die Berechnung nicht ganz einfach, da eine kontinuierliche Massenverteilung vorliegt. Statt der Summe ist ein Integral anzuwenden.
Berechnungsvorschläge:

<u>Vollpyramide</u>:

Der Ursprung des Koordinatensystems liege in der Pyramidenspitze, die z-Achse zeige zum Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche.
Es gelten folgende Bezeichnungen:
Dann folgt aus dem Strahlensatz:



$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{z}{h}$ bzw. $x = \frac{a \cdot z}{2h}$, ebenso $y = \frac{a \cdot z}{2h}$

Für das Volumen ergibt sich damit:

$$V=\int_0^h\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}dxdydz=\int_0^h\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\frac{az}{h}dydz=\int_0^h\left(\frac{az}{h}\right)^2dz=\frac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}h^3=\frac{1}{3}a^2h$$

Die Lage des Schwerpunkts $\vec{x}_S$ lässt sich über das Volumen folgendermaßen ausdrücken (M = Gesamtmasse des Körpers, m_i = Massenpunkte mit den Koordinaten $\vec{x}_i$, $\rho =$ Dichte)

$$\vec{x}_S=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{x}_i=\frac{1}{\rho V}\sum \rho V_i\vec{x}_i=\frac{1}{\int \rho dV}\int \rho\vec{x}dV$$

Unter der Annahme, dass die Dichte überall gleich ist, vereinfacht sich dies zu:

$\vec{x}_S=\frac{1}{V}\int \vec{x}dV$, also:

$$\vec{x}_S=\frac{1}{V}\int_0^h\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}dxdydz=\frac{1}{V}\int_0^h\int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\begin{pmatrix}0\\\frac{az}{h}y\\\frac{az^2}{h}\end{pmatrix}dydz=\frac{1}{V}\int_0^h\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{a^2z^3}{h^2}\end{pmatrix}dz=\frac{3}{a^2h}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{1}{4}h^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{4}h\end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt bei der Vollpyramide liegt also in der Höhe ¼ h.

<u>Hohlpyramide</u>
Vorüberlegungen:
Der Koordinatenursprung liege im Mittelpunkt des Grundflächenquadrats ABCD, die z-Achse zeige in Richtung Pyramidenspitze E. Dann ergeben sich als Koordinaten der Ecken:

$A(\frac{a\sqrt{2}}{2}/-\frac{a\sqrt{2}}{2}/0),\quad B(\frac{a\sqrt{2}}{2}/\frac{a\sqrt{2}}{2}/0),\quad C(-\frac{a\sqrt{2}}{2}/\frac{a\sqrt{2}}{2}/0),\quad D(-\frac{a\sqrt{2}}{2},-\frac{a\sqrt{2}}{2}/0),\quad E(0/0/0)$ Die Pyramide wird durch fünf Flächen begrenzt. Der Flächeninhalt A dieser Mantelfläche ist also die Summe der Flächeninhalte des Grundflächenquadrats und der vier Seitendreiecke, also $A=a^2+4\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$.

Mit den Bezeichnungen von oben errechnet sich die Lage des Schwerpunkts dann über

$$\vec{x}_S=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{5}\vec{x}_i m_i=\frac{1}{\rho A}\sum_{i=1}^{5}\rho\vec{x}_i A_i .$$

Die Schwerpunkte der einzelnen Flächen ergeben sich wie folgt:

Quadrat: $\vec{x}_{S(ABCD)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (Schnittpunkt der Symmetrieachsen)

Dreiecke, allgemein: $\vec{x}_S=\frac{1}{3}(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3)$, und speziell:

$$\vec{x}_{s(ABE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a\sqrt{2} \\ 0 \\ h \end{pmatrix},\ \vec{x}_{s(BCE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ a\sqrt{2} \\ h \end{pmatrix},\ \vec{x}_{s(CDE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a\sqrt{2} \\ 0 \\ h \end{pmatrix},\ \vec{x}_{s(DAE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -a\sqrt{2} \\ h \end{pmatrix}$$

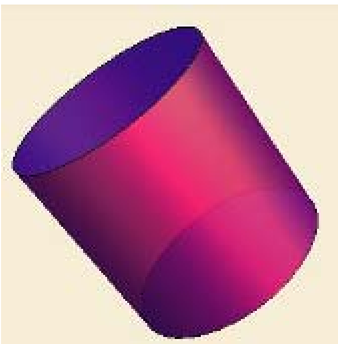
Schwerpunktberechnung:
Da alle vier Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, kann folgender Ansatz gewählt werden:

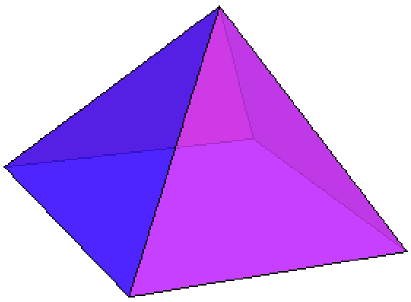
$$\vec{x}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \vec{x}_i = \frac{4m_{Dreieck}}{M}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix} = \frac{4m_{Dreieck}}{3M}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix} = \frac{4\rho A_{Dreieck}}{3\cdot(4\rho A_{Dreieck} + \rho A_{Quadrat})}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix}$$

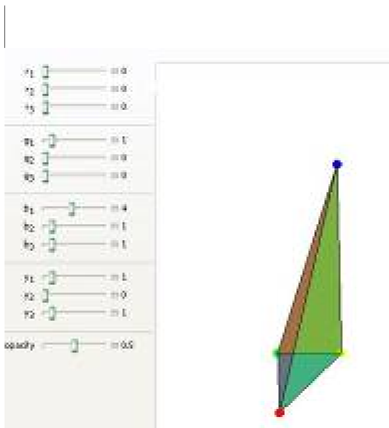
$$= \frac{4\cdot 2a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{3(4\cdot 2a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}+a^2)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{8h\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{3\cdot(8\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}+a)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts hängen also von den Abmessungen der Pyramide ab, allerdings bei rund 1/3 h. Ist beispielsweise a=h, liegt der Schwerpunkt bei $\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{1+4\sqrt{5}}h$, also etwa bei 0,30h. Für h = 2a, liegt der Schwerpunkt etwa bei 0,31 h. Bei einer schmaleren Pyramide mit h = 8a liegt er bei 0,33 h usw.

c) Steht eine Software wie zum Beispiel Mathematica zur Verfügung, können die Körper auch in 3D-Graphik erzeugt werden und über den Menüpunkt der Schwerpunkt direkt angezeigt werden. So können zum Beispiel Schwerpunktberechnungen kontrolliert und auch durch dynamische Veränderungsmöglichkeiten der Figuren unterschiedliche Schwerpunktlagen verfolgt werden.







Arbeitsblatt – Schwerpunkt bei Flächen und Körpern

Allgemeine Aufgabe:
Bestimme die Lage des Schwerpunkts im Dreieck, Viereck, im Würfel, bei der Pyramide usw.

Arbeitsauftrag 1: Schwerpunkt beim Dreieck

a) Schneide aus der Pappe ein Dreieck.
b) Zeichne in dein Pappdreieck die Seitenhalbierenden ein und Balanciere anschließend das Dreieck im Schnittpunkt auf deinem Zeigefinger. Beobachte: Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden?
c) Hänge das Dreieck nun nacheinander an verschiedenen Punkten auf (an den Ecken oder Seiten) und zeichne jeweils die Schwerelinien ein, möglichst auf der Rückseite, die noch nicht bezeichnet ist). Balanciere das Dreieck dann im Schnittpunkt der Schwerelinien auf deinem Zeigefinger. Beobachte: Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Schwerelinien?
d) Bestätige die Gleichheit beider Schnittpunkte.

Arbeitsauftrag 2: Analytische Beschreibung des Schwerpunkts im Dreieck

Ein beliebiges Dreieck ABC lässt sich über die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seiner Punkte A, B, und C beschreiben.

Drücke den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunkts S durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

Arbeitsauftrag 3: Schwerpunkt beim Viereck

Überprüfe, ob die folgende (zum Dreieck analoge) analytische Beschreibung des Schwerpunkts im Viereck allgemein gültig ist: $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

Führe dazu folgende Aufträge aus:

a) Zeichne das Trapez ABCD mit A(0/0), B(12/0), C(8/7) und D(2/7) auf Pappe.
b) Berechne die Lage des Schwerpunkts auf Grund der oben angegebenen Gleichung.
c) Zeichne den Schwerpunkt auf Grund des Ergebnisses in das Papptrapez ein.
d) Überprüfe die Lage des Schwerpunkts im Pappdreieck experimentell durch die Hängemethode.
e) Überprüfe die Lage des Schwerpunkts im bereit liegenden Trapez ebenfalls mit der Hängemethode. Gib ungefähr die Koordinaten an. Was stellst du fest?
f) Der physikalische Schwerpunkt ist durch die folgende Gleichung gegeben.

$$\vec{s} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k} \sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{x_i}$$

m_i bezeichnet die Massen der Körperpunkte und x_i deren Lage.
Erläutere diese Gleichung und erkläre mit ihrer Hilfe die Beobachtungen aus den Experimenten.
g) Beantworte die oben gestellte Frage zur Allgemeingültigkeit der Gleichung für den Schwerpunkt im Viereck.

Arbeitsauftrag 4: Schwerpunkt bei Körpern

Bestimme den Schwerpunkt der bereit liegenden Körper. Stelle zunächst eine Vermutung auf und überprüfe die Vermutung anschließend
a) mit dem Hängeverfahren b) physikalisch bzw. analytisch c) am Computer.

Erweiterung: Zusammenhang zwischen Stabilität und Lage des Schwerpunkts

Stationen: Phänomene

Hinweis: Hierzu gibt es viele weitere Anregungen in Themenheften von Schulbuchverlagen, aber auch Jugendbüchern, die oft spannende Freihandexperimente enthalten.

Beispiele:

<u>Schwerpunktverlagerung:</u>

- Versuch 1: Ein Luftballon wird mit ca. 1l Wasser gefüllt und dann aufgeblasen. Anschließend werfen sich zwei Personen den Ballon gegenseitig zu. Durch die Bewegung des Wassers im Ballon ändert sich ständig der Schwerpunkt, so dass die Wurfrichtung nicht vorausgesagt werden kann.
- Versuch 2: In einen Topf mit Wasser wird eine Zitrone gelegt. Anschließend versuchen die Versuchspersonen eine Münze so auf die Zitrone zu legen, dass die Münze nicht ins Wasser fällt. Durch das Auflegen der Münze verlagert sich aber der Schwerpunkt, so dass sich die Zitrone im ungünstigen Fall dreht.

<u>Stabiles Gleichgewicht: Schwerpunkt unter Unterstützungspunkt</u>

- Versuch 3: Die Versuchsanordnung besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen:
  - Standteil: Eine Flasche wird mit einem Korken verschlossen. In den Korken wird vorsichtig senkrecht eine Nadel so gesteckt, dass die Spitze nach oben zeigt.
  - Aufsetzteil: Ein Korken wird auf einer Seite vorsichtig mit einem Messer eingeschlitzt und eine Münze eingeschoben. Anschließend werden von beiden Seiten symmetrisch je eine Gabel eingesteckt.

  Versuchsdurchführung: Das Aufsetzteil wird mit der Münze auf die Nadel des Standteils gebracht. Die Gabeln balancieren und können sogar durch Anstoßen in Drehung versetzt werden, ohne herunter zu fallen.

<u>Stabiles Gleichgewicht: Schwerpunkt über Unterstützungsfläche</u>

- Versuch 4: Auf einen Tisch wird ein Bücherstapel gelegt. Die oberen Bücher werden immer weiter nach vorne geschoben, bis das oberste Buch nicht mehr über dem untersten Buch liegt. Man kann diesen Bücherstapel bis an die Tischkante heranschieben, ohne dass der Stapel zusammenbricht. Die Stabilität ergibt sich, da der gemeinsame Schwerpunkt des Stapels über der Unterstützungsfläche liegt.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.