



Hintergrund

Allgemeiner didaktischer Hintergrund

Ausgangspunkt ist ein fächerübergreifender Ansatz mit den Naturwissenschaften, insbesondere mit der Physik. Durch außermathematische Bezüge sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe naturwissenschaftlicher Kontexte und Methoden soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen werden, andererseits die Vielseitigkeit mathematischer Begriffe erfahren werden.

Naturwissenschaftliche Inhalte bieten die Chance für einen wirklichkeitsnahen Unterricht. Konkrete physikalische oder biologische Zusammenhänge können mathematische Modellierungsaktivitäten anregen und zu authentischen Erfahrungen führen. Mathematische Inhalte und Methoden werden in sinnvollen Zusammenhängen gelernt; die Realität der Schülerinnen und Schüler kann mit mathematischer Einsicht erweitert werden. Unterschiedliche Realitätsbezüge führen auf unterschiedliche Modelle und können somit auch zur Kontrastierung von begrifflichen Eigenschaften und von verschiedenen Modellen beitragen. Die Vielfalt naturwissenschaftlicher Phänomene gestattet offene Aufgabenstellungen und damit ein selbstständiges Erarbeiten der Mathematik. Mathematische Begriffe, wie zum Beispiel der Funktionsbegriff, können als Modellierungswerkzeuge erfahren werden. In unterschiedlichen Realitätsbezügen können ihre vielseitigen Bedeutungszusammenhänge und ihre unterschiedlichen Eigenschaften erfasst werden. Im Zusammenhang mit dem Thema „Besondere Punkte im Dreieck“ gestatten Experimente eine globalere Sichtweise und Vernetzungen, indem der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck als eines von vielen Beispielen für einen Körperschwerpunkt auftritt.

Unterrichtliche Umsetzung – die Idee

Grundidee der unterrichtlichen Umsetzung ist, dass die Schülerinnen und Schüler den Begriff des Schwerpunkts über Lagebestimmungen in realen Situationen bzw. naturwissenschaftlichen Zusammenhängen und durch experimentelle Aktivitäten erfahren. Die Situationen werden an verschiedenen Stationen präsentiert. Beim Durchlaufen der Stationen werden verschiedene Aspekte des Themas erarbeitet. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck wird als Spezialfall erkannt und eingeordnet in das Thema Schwerpunkt bei Körpern und Flächen.

Fachlicher Hintergrund

Der mathematisch-naturwissenschaftliche Begriff: Schwerpunkt

Ein Thema im Mathematikunterricht ist „Besondere Punkte im Dreieck“. Dazu gehört u.a. die Entdeckung, dass sich die drei Seitenhalbierenden im Dreieck in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Das ist bemerkenswert, aber nicht alles. Eine Betrachtung in einem naturwissenschaftlichen Kontext eröffnet besondere Chancen für eine vielseitige, anwendungsorientierte und realitätsbezogene Erarbeitung. Denn dieser gemeinsame Schnittpunkt ist gleichzeitig der Schwerpunkt des Dreiecks.

Definition

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Schnittpunkt aller seiner Schwerlinien.

Erklärung der Begriffe:

Eine Schwerlinie ist die Wirklinie der Gewichtskraft.

Die Gewichtskraft F_g eines Körpers ist die Kraft, mit der er von der Erde angezogen wird. Wenn wir uns den Körper aus vielen Masseteilchen zusammengesetzt vorstellen, ergibt sich die Gewichtskraft als Resultierende aller Teilgewichtskräfte, die auf die Masseteilchen wirken. Sie errechnet sich aus der (Gesamt-)Masse m des Körpers und der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ kgm/s}^2$ mit $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

Sind die Orte \vec{x}_i aller Masseteilchen m_i des Körpers bekannt, ergibt sich der Schwerpunkt

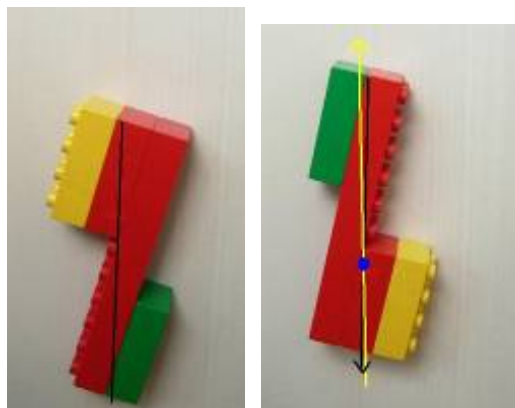
$$\text{als } \vec{s} = \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \sum_{i=1}^k m_i \vec{x}_i .$$

Den Schwerpunkt kann man sich als Angriffspunkt der Gewichtskraft vorstellen. Wirkt also in diesem Punkt eine der Gewichtskraft gleich große, aber entgegengesetzte Kraft, ist der Körper im Gleichgewicht.

Aus dieser Definition ergeben sich
Verfahren zur Schwerpunktbestimmung:

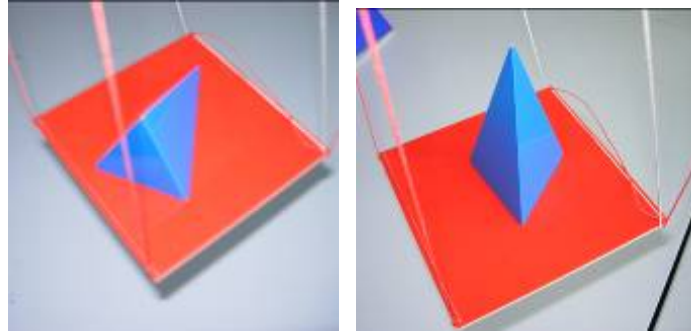
1. Aufhängeverfahren:

Der Körper wird in zwei Positionen aufgehängt und jeweils die entsprechenden Schwerlinien festgestellt (Abbildung). Anschließend wird der Schnittpunkt konstruiert.



2. Wiegeverfahren:

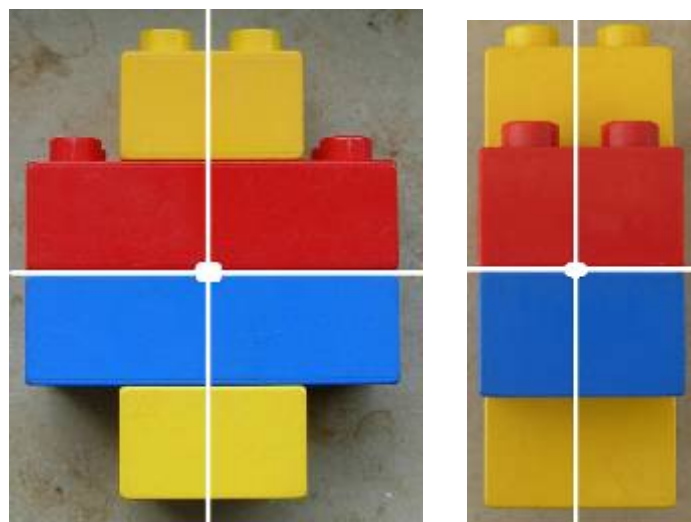
Der Körper wird in zwei verschiedenen Positionen auf eine an einem Seil aufgehängte Plattform gelegt und austariert. Die Schwerelinien werden festgestellt und ihr Schnittpunkt gebildet (Abbildung).



3. Stützkraftmessungsverfahren (für große, nicht entsprechend aufhängbare Körper):
Die Bestimmung der Schwerelinien erfolgt über die Messung von Stützkraften in zwei verschiedenen Körperlagen.

Ein wichtiges Ergebnis, das sich zum Beispiel aus Experimenten zu 1. ergeben kann, ist:
Bei homogenen Körpern gilt:

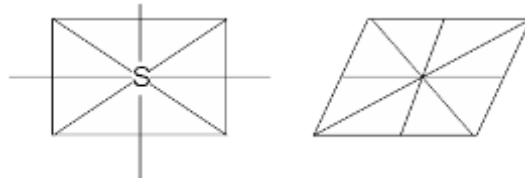
Alle Symmetriegeraden sind Schwerelinien (In den zweidimensionalen Abbildungen sind einige Symmetriegeraden eingezeichnet; die Lage des Schwerpunkts ist angedeutet; er befindet sich im Zentrum des Körpers)



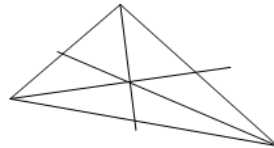
Diese Überlegungen lassen sich auf die Schwerpunktbestimmung von Flächen und Geraden übertragen:

Schwerpunkt beim

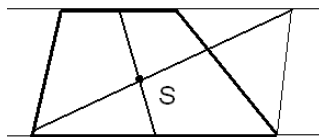
Parallelogramm, Rechteck: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, aber auch der Diagonalen.



Dreieck: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

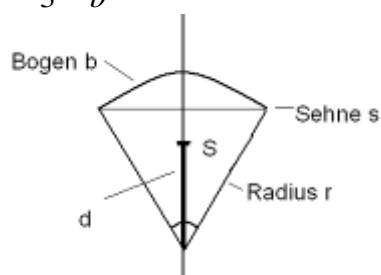


Trapez: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der beiden parallelen Seiten mit der Diagonalen des Ergänzungsparallelogramms



Kreissegment mit dem Radius r , der Bogenlänge b und der Sehnenlänge s :

auf der Mittellinie im Abstand $d = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$.



Hinweis:

Der Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen ergibt sich aus dem Momentensatz über die Schwerpunkte der Teilflächen. Der Momentensatz gibt den Abstand des Schwerpunkts von einer Achse (zum Beispiel y-Achse) an als Summe der Produkte aus Flächeninhalt der Teilfläche und Abstand des Teilflächenschwerpunkts von der Achse (vgl. auch Materialteil).