Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Učno gradivo

Ideja za izvedbo pri pouku

Za izvedbo v razredu predlagamo delo po različnih postajah, ki pokrivajo teme o težišču/presečišču težiščnic v trikotniku. Postaje morajo biti zasnovane tako, da lahko učenci razumejo koncept težišča v tehnično – fizikalnem smislu, ob vsem tem pa naj vsebujejo tudi matematični model. Predlogi, ki so zbrani tukaj, so prilagojeni tej ideji. Da bi lahko povezali različne vidike koncepta težišča, ki jih bodo učenci izkusili na različnih postajah, naj vsaka skupina pripravi plakat za končno predstavitev v razredu. Delo je mogoče razširiti tudi s pomočjo snovi na spletni strani, saj zajema dodatne informacije, ki jih je možno dodati h končni predstavitvi.

Na višjih nivojih se lahko težišče na ravninah in v telesih razlaga s pomočjo matematike, na primer: s pomočjo integralnega računa, če je limita funkcije f(x) znana.

Nadalje se lahko vsebine razširijo s pomočjo fizikalnih poskusov. Pokaže se lahko povezava med stabilnostjo, lego težišča in oporno konstrukcijo.

Postaje:
- postaja: metoda obešanja
- postaja: metoda tehtanja
- postaja: simetrija osi
- postaja: ravnine
- postaja: matematična definicija težišč s pomočjo računalnika
- postaja: ravnine iz kartona

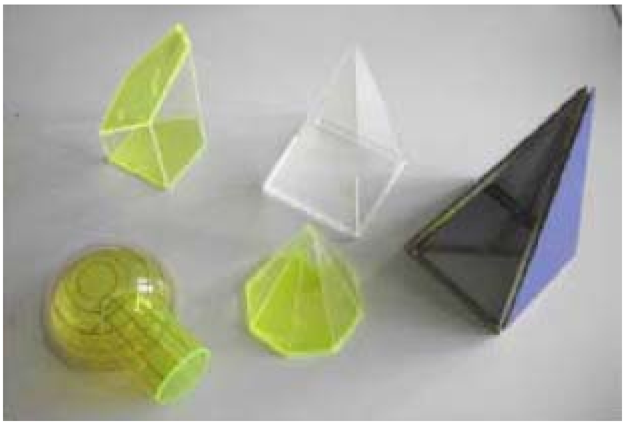
Možne razširitve oziroma alternative za višje letnike srednjih šol:
- Delovni list: težišče na ravninah in v telesih

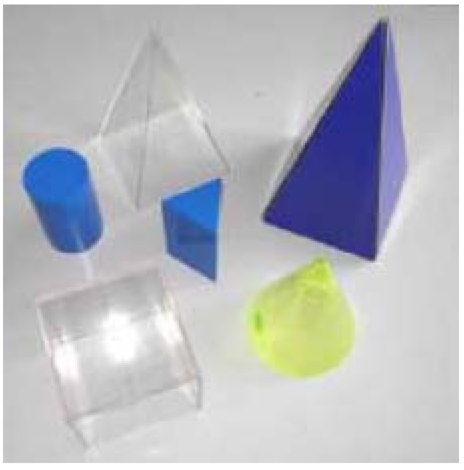
Možne razširitve:
Povezava med stabilnostjo in položajem težišča
Postaje: pojavi

Postaja: metoda obešanja

Vsebina in cilj:
Z metodo obešanja najti težišča različnih teles.

Pripomočki:
Različna telesa, najbolje taka, da jih lahko obesimo.
Zelo primerne so kocke za sestavljanje, saj jih z lahkoto sestavimo v več različnih teles, poleg tega pa lahko med dve kocki namestimo nit za visenje. Votla telesa ali telesa, ki so narejena iz prozorne plastike, so velika prednost. Težišče znotraj njih lahko poiščemo s pomočjo slamic, ki jih pritrjujemo na oglišča. Po drugi strani pa lahko učence zelo motivirajo njihovi osebni predmeti.
Nit, ravnilo, lepilni trak, svinčnik ali klobučevinast nalivnik, slamice za označevanje težiščnic.



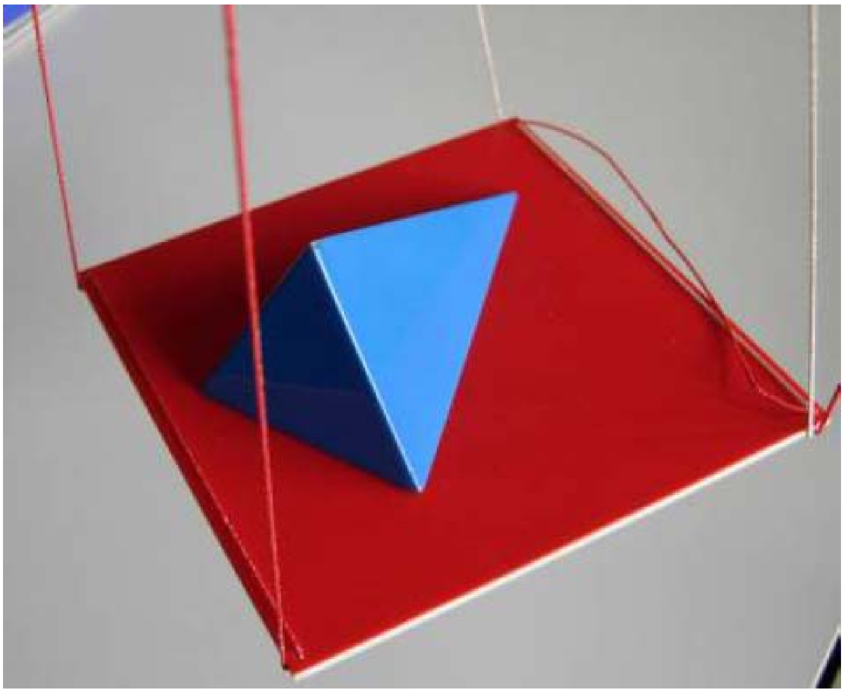


Izvedba:
Telesa so obešena v različnih (vsaj dveh) točkah; na vsakem so označene težiščnice in zaznamovane z lepilnim trakom; težišče je določeno kot presečišče težiščnic.

Postaja: Metoda tehtanja

Vsebina in cilj:
Najti težišča različnih teles z metodo tehtanja.

Pripomočki:
Različna telesa, nekaj visečih tehtnic: na primer, deska s snemljivimi nitkami za obešanje, na katero lahko položimo telesa oziroma trinožnik, s katerega lahko obešamo telesa; ravnilo, lepilni trak, svinčnik ali klobučevinasto pero, slamice za označitev težiščnic.

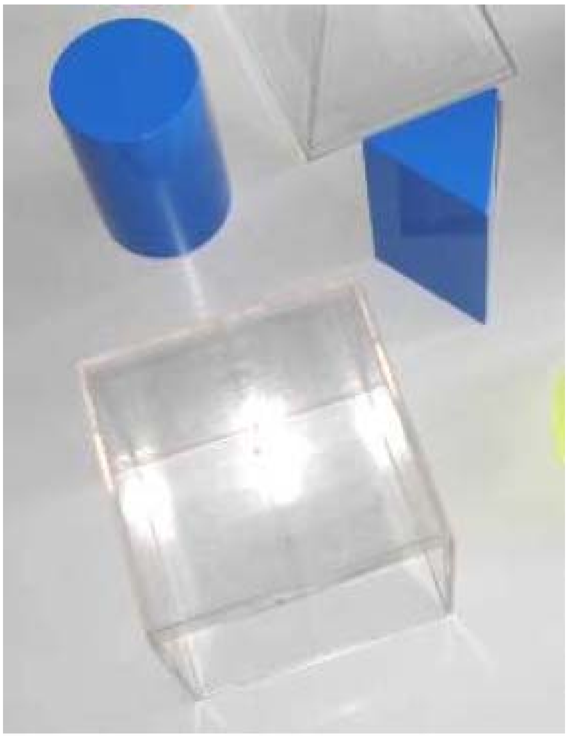


Izvedba:
Telesa so na tehtnico položena v različnih položajih (vsaj dveh), na telesih so označene težiščnice in s presečiščem težiščnic je določeno težišče.

Postaja: simetrija osi

<u>Vsebina in cilj:</u>
Določiti težišča različnih teles z metodo obešanja, dojeti osi simetrije kot težiščnice.

<u>Pripomočki:</u>
Različna simetrična telesa z več kot eno osjo simetrije, najbolje z nameščenim kaveljčkom na simetrični osi; nit, lepilni trak, ravnilo, svinčnik ali klobučevinasto pero, oziroma slamice za označevanje težiščnic.



<u>Izvedba:</u>
Telesa so s kaveljčkom obešena v različnih položajih tako, da so osi simetrije enake težiščnicam. Označene so težiščnice, težišče pa je določen s presečiščem težiščnic.

<u>Razširitev:</u>
Učencem so na voljo različna osno simetrična telesa in naprava za obešanje (lepilni trak, kaveljčki itd.). Ko najdejo simetrijske osi, v njih namestijo kaveljčke. Nato določijo težišče z metodo tehtanja.

Postaja: Ravnine

Vsebina in cilj:

Določanje težišča različnih ravnin s metodo obešanja.
Tudi: identificirati osi simetrije (če so dane) kot težiščnice.

Pripomočki:

Različni ravni kartonski materiali z nitkami za obešanje; če je potrebno škarje za rezanje lukenj v karton.

Izvedba:

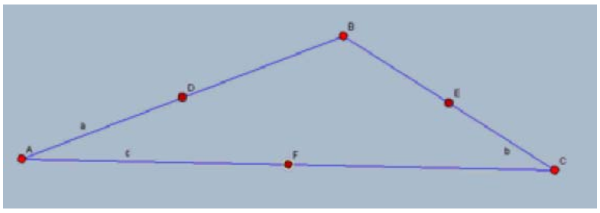
Kartonaste ravnine so obešene v različnih položajih, označene so težiščnice, težišče pa je določeno s presečiščem težiščnic.
Namig: Če so ravnine obešene pred trdno steno, je težiščnice lažje narisati.

Če lahko uravnotežimo ravnino s kazalcem v težišču, potem je prst res v težišču.

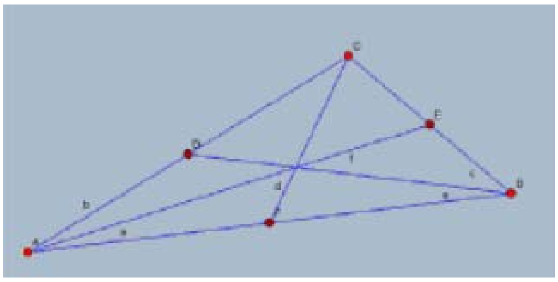
Postaja: določanje težišča s pomočjo računalnika (z uporabo dinamičnega geometrijskega sistema)

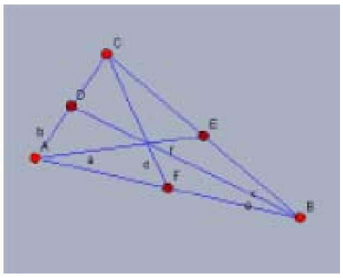
Vsebina in cilj:
S pomočjo dinamičnega geometrijskega sistema odkriti naslednjo trditev: v trikotniku se daljice, ki povezujejo razpolovišča stranic z nasproti ležečim ogliščem, sekajo v eni točki. Ta točka je težišče trikotnika.

Pripomočki:
Računalnik z naloženim geometrijskim programom.
Naloga: Narišite kakršenkoli trikotnik z njegovimi težiščnicami. Kaj ugotovite? (namig: trikotnik lahko spremenite tudi tako, da povlečete eno izmed točk.)
Ali: pripravljen dokument s trikotnikom in z označenimi razpolovišči na vsaki stranici (spodnji trikotnik je narisan s programom Cinderella).



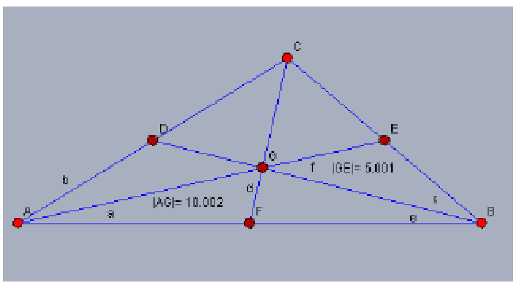
Izvedba:
Osnovna kompozicija je razširjena z risanjem težiščnic. Trikotnik je naključno spremenjen. Ugotovimo lahko, da se težiščnice vedno sekajo v eni točki.





Razširitev:
Naloga: Natisnite kakršenkoli trikotnik, nalepite ga na karton in ga uravnotežite na kazalcu. V kateri točki morate podpirati trikotnik, da je v ravnotežju?

Naloga: Odkrivajte nadaljnje odnose. V kakšnem razmerju težišče razdeli težiščnice? (Uporabite merljivo funkcijo.)



Naloga: Povejte vzroke, zakaj se tri težiščnice vedno sekajo v eni točki. Namig: Raztegnite daljici pri točki G (težišče) za faktor 0,5.

Postaja: ravnine iz kartona

Vsebina in cilj:
Določitev težišča različnih površin, opis njegovega položaja in preverjanje njegove pravilnosti.

Pripomočki:
Različni ravni kosi kartona, svinčnik, ravnilo, če je potrebno, karton za rezanje dodatnih kosov.

Izvedba:
Težišče neke površine najprej določimo grafično (če je mogoče, s poskusom) s pomočjo pridobljenih rezultatov opazovanj v prejšnjih poizkusih. Položaj težišča je določen in opisan z velikostjo površin. Na primer: težišče v trikotniku je presečišče težiščnic. Njegova pravilnost je preverjena tako, da telo obesimo iz te točke ali pa jo poskusimo podpirati v njej. Na primer: v težišču se lahko trikotnik uravnoteži s kazalcem.

Razširitev oziroma alternativni predlog za višje letnike srednjih šol

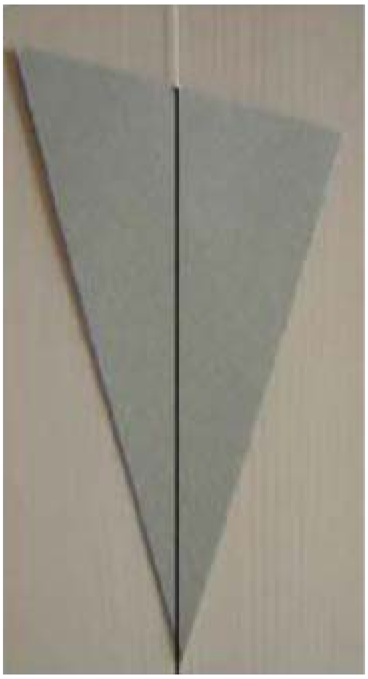
<u>Opomba:</u> Vse naloge tega alternativnega predloga lahko najdete na strani 17 kot navodila, ki se lahko kopirajo.

Osnovna naloga: Določitev položaja težišča v trikotniku, pravokotniku, kocki, piramidi itd.

Naloga 1: Težišče v trikotniku

<u>Pripomočki:</u> karton, škarje.

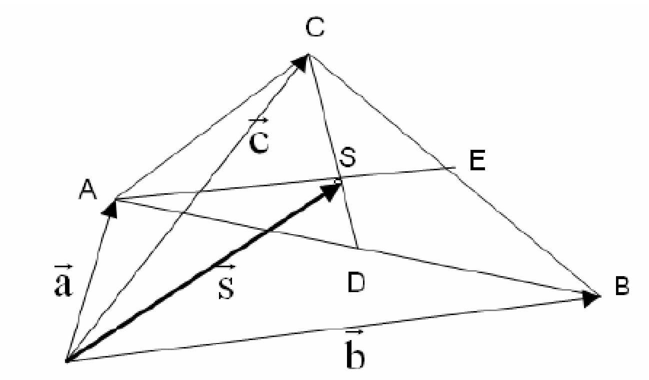
<u>Naloga:</u>
1. Iz kartona izrežite trikotnik.
2. Označite težiščnice trikotnika in ga uravnotežite na kazalcu v točki kjer se težiščnice sekajo.
   Opomba: Zakaj je presečišče težiščnic pomembno?
3. Trikotnike zaporedoma obesite na različnih točkah (v ogliščih ali stranicah) in narišite posamezne težiščnice (najbolje, da narišete na zadnjo stran, kjer še ni ničesar narisano). Uravnotežite trikotnik s svojim kazalcem v točki, kjer se sekajo težiščnice.
   Opomba: Zakaj je presečišče težiščnic pomembno?
4. Potrdite enakost obeh presečišč.



Naloga 2: Analitičen opis težišča v trikotniku

<u>Naloga:</u> Katerikoli trikotnik ABC ja lahko opisan s krajevnimi vektorji *a*, *b* in *c* do njegovih oglišč A, B, C.
Izrazite krajevni vektor *s* težišča S z *a*, *b* in *c*.

Rešitev:

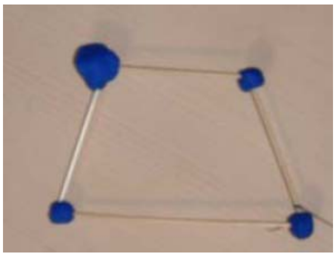


V naslednjem sklepanjem uporabimo dejstvo, da je težišče S presečišče težiščnic (tukaj CD in AE) in da točka S razdeli težiščnice v razmerju 1:2, oziroma odseki težišč so 1/3 in 2/3 dolžine težiščnice.

$$\vec{s} = \vec{a} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$
$$= \vec{a} + (-\vec{a} + \vec{c}) + \frac{2}{3}(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$$
$$= \vec{c} + \frac{2}{3}(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}))$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Naloga 3: Težišče v štirikotniku

Pripomočki: karton, škarje, pripravljen trapez podoben kot je na spodnji fotografiji, kaveljček za obešanje, tehtnica (ki meri maso na 0,1 g natančno).



Fotografija: Pripravljen trapez (najbolje, da je enakih mer, kot tisti v nalogi 1), je sestavljen iz preprostih lesenih paličic in oglišč iz plastelina. Vsaj eno oglišče naj se od drugih jasno razlikuje v masi. To lahko dosežemo z večjo kroglico plastelina, še bolje pa z manjšo železno kroglico, ki jo prekrijemo s plastelinom tako, da ni vidna.

Naloga: Preverite ali v splošnem drži naslednji analitičen opis (analogen s tistim v trikotniku) težišča v štirikotniku:

$$\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

Da to ugotovite, rešite naslednje naloge:

1. Narišite trapez ABCD z oglišči A (0,0), B (12,0), C (8,7) in D (2,7) na karton.
2. S pomočjo zgornje funkcije izračunajte položaj težišča.
3. Izračunano težišče označite na kartonskem trapezu.
4. Z metodo obešanja preverite položaj težišča v kartonskem trikotniku.
5. Z metodo obešanja preverite položaj težišča tudi v trapezu. Ocenite približne koordinate. Kaj opazite?
6. Fizikalno težišče je podano z naslednjo enačbo:

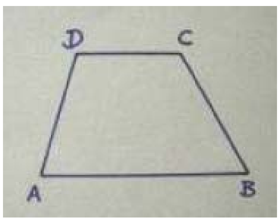
$$\vec{s} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k} \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{x_i}$$

   m_i ponazarja maso telesa v točki i in x_i njen položaj.
   Pojasnite enačbo in jo uporabite pri razlagi vaših opazovanj poskusov.

7. Odgovorite na vprašanje zgoraj, ki zadeva splošno veljavnost enačbe za težišče štirikotnikov.

Predlog rešitve naloge 3:

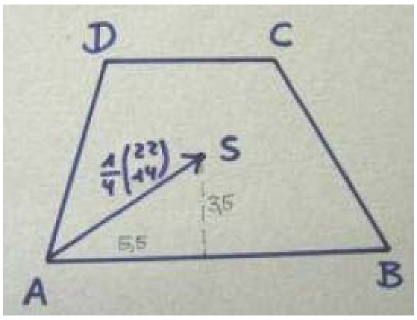
a)



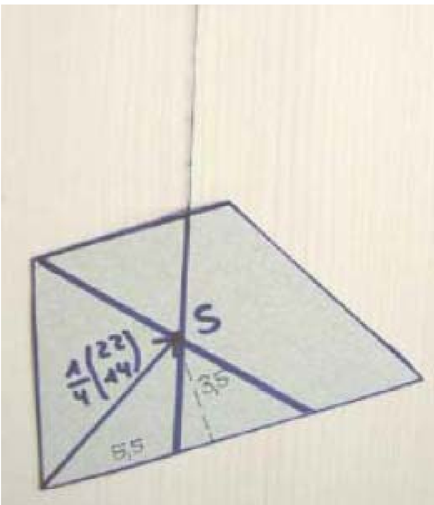
b) $$\vec{s} = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}22\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5,5\\3,5\end{pmatrix}$$

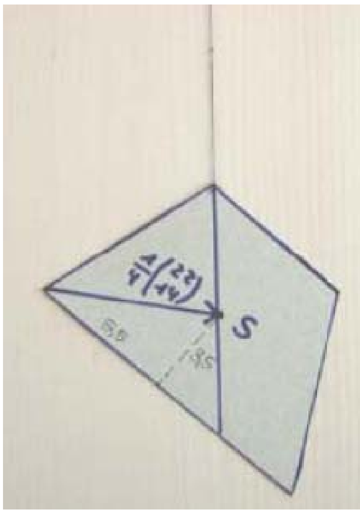
to je, S(5.5, 3.5).

c)

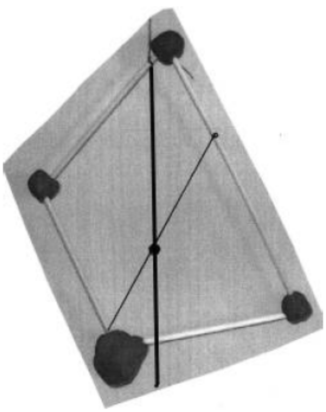


d) Položaj težišča je potrjen (če upoštevamo napake merjenja) z metodo obešanja.





e) Metoda obešanja kaže, da se položaja težišč v kartonastem trapezu in v trapezu, pripravljenem z lesenimi palčkami in plastelinom, ne skladata, kljub temu da izgledata istih dimenzij.
(Namig: V različnih položajih lahko težiščnice narišete na papir, ki ga držite za trapezom.)



Tukaj je položaj težišča približno (4.7, 4.0).

f) S primerjavo dane fizikalne formule in izvedenih eksperimentov lahko ilustracijo formule najbolje pokažemo z razporeditvijo mase trapeza. To lahko naredimo s tehtanjem oglišč, s tem da zanemarimo težo stranic (lesenih stečišč).
Primer: Kroglice iz plastelina na ogliščih A, B in C imajo mase $m_1=m_2=m_3=0{,}1$g, kroglica v oglišču D pa ima maso $m_4=0{,}2$g
Torej:

$$\vec{s} = \frac{1}{0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}2}\left(0{,}1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+0{,}1\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}+0{,}1\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}+0{,}2\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{0{,}5}\left(\begin{pmatrix}1{,}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}4\\1{,}4\end{pmatrix}\right) = 2\cdot\begin{pmatrix}2{,}4\\2{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}8\\4{,}2\end{pmatrix}$$

Torej, S(4.8, 4.2) namesto (5.5, 3.5). Mimogrede, ta vrednost se ujema z rezultatom primera naloge 5.

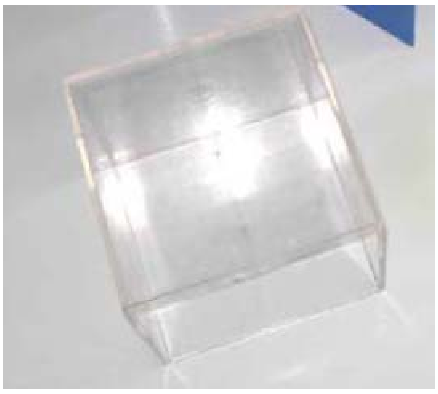
g) Analitična enačba za težišče je veljavna za štirikotnike z običajno razporeditvijo mase.

$$\vec{s} = \frac{1}{n\cdot m}\sum_{i=1}^{n} m\cdot\vec{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{x}_i$$

Na primer, če so vse štiri mase enake, je rezultat $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4)$

Naloga 4: Težišče v telesih

<u>Pripomočki:</u> Kocka, kvader in piramida (po potrebi tudi druga telesa), nekaj vrvice za obešanje; če je možno: računalnik s programom Mathematica za konstruiranje tridimenzionalnih teles in preverjanje položaja težišča (možna je animacija).




<u>Naloga:</u> Ugotovite težišče v telesih, ki so vam pri roki. Najprej postavite hipotezo in jo potem poskusite potrditi

a) z uporabo metode obešanja,
b) fizikalno oz. analitično,
c) z računalnikom.

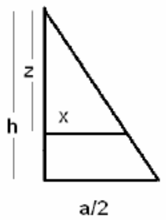
<u>Možne metode rešitev:</u>

a) Hipoteza, ki pravi, da je težišče presečišče težiščnic, je potrjena, če je telo kocka. Težišče v piramidi prav tako leži težiščnici. Če v poizkusu uporabimo votlo in polno telo, ugotovimo, da se težišča razlikujejo. Na primer, težišče v polni piramidi z višino h leži na 1/4h, medtem ko je težišče v votli piramidi odvisno od osnovne ploskve in višine.
b) V polnih telesih je enakomerna porazdelitev mase, tako da fizikalno težišče ustreza analitičnemu. Vendar pa izračun ni lahek, saj imamo stalno (trajno) porazdelitev mas, zato moramo uporabiti integral namesto vsote.

Predlogi za izračun:

<u>Polna piramida:</u>
Postavite izhodišče koordinatnega sistema na vrh piramide, z os pa naj bo usmerjena proti centru osnovne ploskve.
Uporabite oznake s skice in izrek o presečiščih:

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{z}{h} \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot z}{2h} \Leftrightarrow y = \frac{a \cdot z}{2h}$$



Torej je prostornina enaka:

$$V=\int_0^h \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} dxdydz=\int_0^h \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \frac{az}{h} dydz=\int_0^h \left(\frac{az}{h}\right)^2 dz=\frac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}h^3=\frac{1}{3}a^2h$$

Položaj težišča x_s lahko izrazimo s prostornino na naslednji način (M = celotna masa telesa, m_i = masa točk s koordinatami x_i, ρ = gostota).

Če domnevamo, da je gostota porazdeljena enakomerno, lahko poenostavimo:

$$\vec{x}_S=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{x}_i=\frac{1}{\rho V}\sum \rho V_i\vec{x}_i=\frac{1}{\int \rho dV}\int \rho\vec{x}dV$$

$$\vec{x}_S=\frac{1}{V}\int_0^h \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dxdydz=\frac{1}{V}\int_0^h \int_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{az}{h}y \\ \frac{az^2}{h} \end{pmatrix} dydz=\frac{1}{V}\int_0^h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2z^3}{h^2} \end{pmatrix} dz=\frac{3}{a^2h}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{1}{4}h^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4}h \end{pmatrix}$$

Tako je težišče v polni piramidi na višini ¼ h.

<u>Votla piramida</u>

Premislek: Izhodišče koordinatnega sistema je v središču osnovne ploskve ABCD, z os je usmerjena proti vrhu E piramide. Potem so koordinate oglišč:

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}/-\frac{a\sqrt{2}}{2}/0\right),\quad B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}/\frac{a\sqrt{2}}{2}/0\right),\quad C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}/\frac{a\sqrt{2}}{2}/0\right),\quad D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2},-\frac{a\sqrt{2}}{2}/0\right),\quad E(0/0/0)$$

Piramida je sestavljena iz petih ploskev. Površina A je vsota površin osnovne ploskve in površin štirih trikotnikov, torej

$$A=a^2+4\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$$

Glede na izračune zgoraj, je položaj težišča določen z

$$\vec{x}_S=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{5}\vec{x}_i m_i=\frac{1}{\rho A}\sum_{i=1}^{5}\rho\vec{x}_i A_i$$

Rezultat težišč posameznih ploskev sledi iz naslednji izračunov:

Kvadrat: $\vec{x}_{s(ABCD)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (točka sečišča simetralnih osi)

Trikotnik v splošnem $\vec{x}_S=\frac{1}{3}(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3)$ in v tem primeru:

$$\vec{x}_{S(ABE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a\sqrt{2} \\ 0 \\ h \end{pmatrix},\ \vec{x}_{S(BCE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ a\sqrt{2} \\ h \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_{S(CDE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a\sqrt{2} \\ 0 \\ h \end{pmatrix},\ \vec{x}_{S(DAE)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -a\sqrt{2} \\ h \end{pmatrix}$$

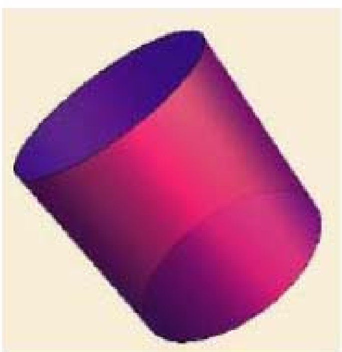
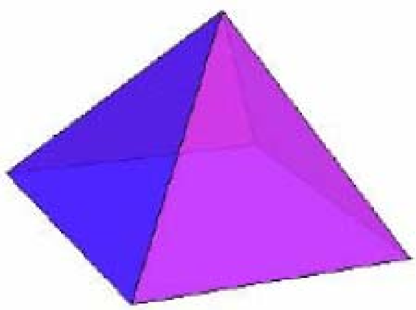
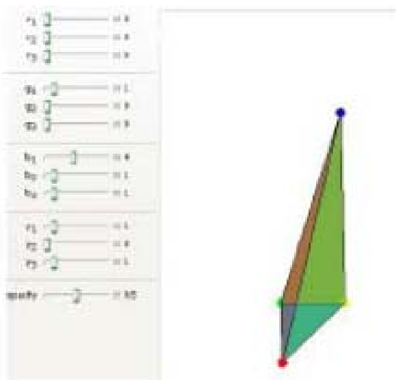
Izračun težišča:
Ker imajo vsi štirje trikotniki enake ploskve, lahko uporabimo naslednji pristop:

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \vec{x}_i = \frac{4m_{triangle}}{M} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix} = \frac{4m_{triange}}{3M}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix} = \frac{4\rho A_{triangle}}{3\cdot(4\rho A_{triangle} + \rho A_{triangle})}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4h \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4\cdot 2a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{3(4\cdot 2a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}+a^2)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{8h\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{3\cdot(8\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}+a)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinate težišča so torej odvisne od mer piramide; vendar so blizu 1/3 h. Če je na primer a=h, je težišče $\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{1+4\sqrt{5}}h$, torej okoli 0.30h. Če je h=2a je težišče okoli 0,31 h. Pri vitkejši piramidi z h = 8a, je pri 0,33h in tako naprej.

c) V programih, kot je Mathematica, je mogoče telesa ustvariti v 3D grafiki. Težišča so prikazana neposredno preko menija. Tako lahko preverjamo izračune težišč in celo koordinate različnih težišč, ki jih povzročijo dinamične spremembe.

Delovni list – težišča površin in teles

Glavna naloga Določitev lege težišča v trikotniku, štirikotniku, kocki, piramidi…

Naloga 1: Težišče v trikotniku

a) Iz kartona izrežite trikotnik.
b) Na karton narišite težiščnice in uravnotežite trikotnik na kazalcu v presečišču težiščnic.
   Opazujte: kašen je pomen presečišč težiščnic?
c) Trikotnik obesite v različnih točkah (ogliščih ali stranicah) in narišite približne težiščnice (če je mogoče jih narišite na strani, ki še ni popisana). Uravnotežite trikotnik na kazalcu v točki kjer se sekajo težiščnice.
   Opazujte: Kakšen je pomen presečišč težiščnic?
d) Potrdite enakost obeh presečišč.

Naloga 2: Analitičen opis težišča v trikotniku

Katerikoli trikotnik ABC lahko opišemo s krajevnimi vektorji *a*,*b*,*c* z izhodiščem v točkah A, B, C. Opišite krajevni vektor *s* težišča S z vektorji *a*, *b* in *c*.

Naloga 3: Težišče v štirikotniku

Preverite, ali je naslednji (v analogiji s trikotnikom) analitičen opis težišča v štiriko-tniku splošno veljaven: $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

Rešite še naslednje naloge:
a) Na karton narišite trapez ABCD z A(0,0), B(12,0), C(8,7) in D(2,7).
b) Izračunajte položaj težišča z uporabo zgornje enačbe.
c) Na osnovi dobljenega rezultata označite težišče na kartonastem trapezu.
d) Z metodo obešanja preverite težišče kartonastega trikotnika.
e) Tudi težišče trapeza preverite z metodo obešanja. Ocenite približne koordinate. Kaj opazite?
f) Fizikalno težišče je dano z naslednjo enačbo:

$$\vec{s} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_k} \sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{x_i}$$

   m_i označuje maso telesa v točki *i* in x_i njen položaj.
   Pojasnite enačbo in jo uporabite pri razlagi vaših opazovanj poizkusov.

g) Odgovorite na zgornja vprašanja, ki se tičejo veljavnosti enačbe za težišče štirikotnikov.

Naloga 4: Težišče v telesih

Določite težišče v telesih, ki so na voljo. Oblikujte hipotezo in jo preverite
a) z uporabo metode obešanja,
b) fizikalno oz. analitično,
c) z uporabo računalnika.

Razširitev: Povezava med stabilnostjo in položajem centra težnosti
Postaje: pojavi

Namig: Posebne izdaje založnikov šolskih knjig ponujajo veliko idej. Zanimive poskuse, ki se tičejo te teme, pa nudi tudi literatura za srednješolce.

Primeri:

Premik težišča:

- Poskus 1: Balon napolnimo s približno enim litrom vode in ga napihnemo. Dva učenca si podajata balon. Zaradi gibanje vode se težišče balona ves čas spreminja, tako da ne moremo predvideti smeri letenja balona.
- Poskus 2: V lonec z vodo položimo limono. Eden izmed učencev poskusi položiti kovanec na limono tako, da ne zdrsne v vodo. Ko položi kovanec na limono se težišče spremeni in limona se v najslabšem primeru v vodi zavrti.

Trajno ravnovesje: težišče pod oporno točko

- Poskus 3: priprava za Poskus je sestavljena iz dveh delov:
  - Osnoven del: steklenica je zaprta z zamaškom. V zamašek pazljivo namestimo iglo, tako da je njena konica usmerjena navzgor.
  - Dodatek: z nožem v konec drugega zamaška pazljivo izrežemo žlebič in vanj vstavimo kovanec. Na nasprotnih strani simetrično namestimo dve vilici.

    Izvedba posusa: dodatek s kovancem namestimo na iglo osnovnega dela. Vilici sta v ravnovesju, mogoče ju je celo vrteti, ne da bi padli na tla.

Trajno ravnovesje: težišče nad območjem opore

- Poskus 4: Kup knjig položimo na mizo. Zgornje knjige postopoma premikamo naprej, tako da čisto zgornja knjiga ne počiva več na najbolj spodnji. Tak kup knjig lahko potisnemo do roba mize, ne da bi se podrl. Stabilnost je rezultat dejstva, da je skupno težišče kupa knjig nad opornim območjem.

Ta projekt se financira s podporo Evropske komisije. Ta publikacija izraža le stališča avtorja ali avtorjev in Komisija ne odgovarja za kakršno koli uporabo v njej navedenih informacij.