Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

Unterrichtsmaterial

Das arithmetische Mittel und das Differential(getriebe)

Die Funktionsweise eines Differential(getriebe)s ist seit ungefähr 2000 Jahren bekannt. Es ist eine geniale technische Erfindung, die nicht viel mehr ist, als die Realisierung einer einfachen mathematischen Idee, des arithmetischen Mittels. Die Analyse eines Differential(getriebe)s bietet einen praktischen und intuitiven Zugang in ein sonst sehr abstraktes mathematisches Konzept, nämlich der funktionalen Abhängigkeiten mehrerer Variablen in einer Gleichung.

Eine englische Version dieses Unterrichtmaterials findet man unter:
http://uc.fmf.uni-lj.si/com/dif/cdif.htmll

Einführung

Alles von uns genießen die Annehmlichkeiten, die uns durch die Technik bereitgestellt wird. Das Differential(getriebe) ist ein wichtiges technisches Element, das wir regelmäßig nutzen. Aber viele sind sich dessen nicht bewusst oder haben jemals über diese einfache technische Idee nachgedacht. Und noch weniger haben jemals über die sehr einfache mathematische Idee nachgedacht, die dahinter steckt. Für jeden, der versucht Mathematik zu verstehen kann es eine große Hilfe sein, wenn abstrakte mathematische Ideen eine tiefere Bedeutung bekommen oder durch technische Realisierungen, die unser Leben erleichtern, veranschaulicht werden.

Wir alle wissen, dass ein Auto von einem Motor angetrieben wird. Aber wie? Wie wird die Energie (Rotation) des Motors auf die Räder übertragen, die das Auto in Bewegung bringen. Beim Fahrrad nutzen wir eine Kette, welche die Rotation des Pedals auf das Rückrad überträgt. Wird dies beim Auto nicht sehr ähnlich realisiert, nur dass die Quelle der Bewegung der Motor ist und nicht unsere Muskeln? Bei den ersten Autos wurde dies wirklich so gemacht. Eine Kette übertrug die Rotation vom Motor auf die (Hinter-)Achse. So liefen linkes und rechtes Rad simultan und brachten das Auto in Bewegung

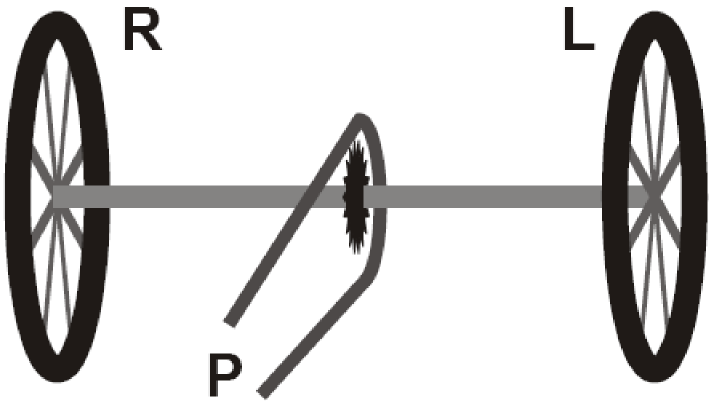

Abbildung 1: Rechtes und linkes Rad sind auf der gleichen Rotationsachse angebracht

Betrachten wir Abbildung 1: vernachlässigen wir das Übertragungsverhältnis auf die Achsen und bezeichnen die Leistung (Rotation) des Motors mit P, die Rotation des rechtes Rades mit R und die des linken Rads mit L. Wir erhalten eine sehr einfache Gleichung (Gleichungssystem):

P=R=L

Aber funktioniert ein Auto auf diese Weise? Nun ja, die ersten Autos liefen so und als Folge dessen, war das Lenken sehr schwierig. Zum Beispiel, bei einer Linkskurve legt das rechte Rad eine längere Strecke zurück als das linke Rad, bei einer Rechtskurve genau umgekehrt. Rein theoretisch, wäre es bei einem Mechanismus, wie im oberen Bild unmöglich zu lenken, da beide Räder sich identisch drehen und deshalb die gleiche Strecke zurücklegen. In Wirklichkeit müssen die Räder leicht auf der Oberfläche rutschen. Heutzutage kann man diesen Effekt bei einem Traktor oder Geländewagen mit aktivierter Differentialsperre erfahren. Zum Beispiel auf unebenem Gelände fahren Bauern mit eingeschalteter Differentialsperre, um die Zugleistung ihres Traktors zu erhöhen. Aber während des Fahrens mit eingeschalteter Differentialsperre kostet es sehr viel (Muskel)Kraft mit dem Lenkrad nach links oder rechts zu lenken. Tatsächlich gab es schon mehrere Traktorunfälle, da es der Fahrer nicht geschafft hatte, bei eingeschalteter Differentialsperre zu lenken. Manchmal tendieren Lenkrad und die für die Lenkung zuständigen Räder (meist Vorderräder) nach rechts zu lenken, aber ein Traktor mit eingeschalteter Differentialsperre kann nur nach vorne stoßen.

Wie wird dieses Problem in der Realität gelöst? Eine einfache Lösung wäre es, wenn man die gesamte Leistung des Motors auf nur eines der beiden Räder übertragen würde. Auf diese Art würde das Lenken „einfach“, aber bei dem heutigen Fahrkomfort, wären Fahren und Lenken wirklich abenteuerlich und gefährlich. Zum Beispiel, wenn der Antrieb auf dem rechten Rad wäre, würde man eine Linkskurve sehr langsam empfinden, während eine Rechtskurve ein Stunt bedeuten würde (es würde sich wie eine Beschleunigung in eine Rechtskurve anfühlen).

Gesellschaftliches Differential

Dies könnte eine interessante Diskussion über unsere Gesellschaft in einer Philosophiestunde sein. Wenn wir über unser eigenes „gesellschaftliches Differential“ nachdenken und es auf die Technik und Mathematik übertragen kann dies ein sehr einfacher Weg zum intuitiven Verständnis von Differential und arithmetischen Mittel sein. Wie bei einem Differential im Auto, wissen wir gar nicht, dass wir das „gesellschaftliche Differential“ nutzen, aber wir merken schnell, falls es nicht mehr „funktioniert“.

Wir können sagen, dass ein gewöhnliches menschliches Wesen mit einem „gesellschaftlichen Differential“ ausgestattet ist. Stell dir vor, ein Pärchen spaziert nebeneinander und redet miteinander und achtet nicht auf den Weg, den sie gerade gehen; vielleicht in einem schönen Park oder auf dem Weg zurück in ihre Wohnung im vierten Stock, auf dem sie in jedem Stockwerk sehr scharfe Kurven laufen müssen. Während sie nach links oder rechts gehen, passen sich beide (unbewusst) an, um in einer Linie mit ihrem Partner zu bleiben. Wenn wir über diese Drehung genauer nachdenken, ist es offensichtlich, dass zum Beispiel bei einer Rechtskurve, der rechte Partner etwas langsamer laufen würde und der Linke etwas schneller, aber ihre durchschnittliche Geschwindigkeit wäre die Gleiche.

Wie schon oben erwähnt, kann eine Fehlfunktion des „gesellschaftlichen Differentials“ leicht bemerkt werden. Meistens passiert dies bei „sehr wichtigen“ Personen, die zu „wichtig“ sind, um ihre Geschwindigkeit an die ihrer Untergebenen anzupassen und ihre Geschwindigkeit auch in Kurven beibehalten. Solch eine Szene ist sehr lustig anzuschauen, wenn zum Beispiel der „untergebene“ Student auf der rechten Seite eines „wichtigen“ Professors mit einem falsch funktionierenden „gesellschaftlichen Differential“ eine Linkskurve läuft und der Student nicht hinterherkommt, die Spur zu halten.

Das arithmetische Mittel

Wenn ein (normales) spazierendes Pärchen eine Linkskurve läuft, läuft die Person links etwas langsamer und die Rechte etwas schneller. Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit bleibt dieselbe. Sei P ihre Durchschnittsgeschwindigkeit, R die Geschwindigkeit des rechten Partners und L, die des Linken, dann kann ihr „gesellschaftliches Differential“ durch die einfache Gleichung

$$P = \frac{R+L}{2}$$

beschrieben werden. Diese Gleichung beschreibt nett, den vollständigen Zusammenhang der Geschwindigkeiten beider Partner und deren Durchschnittsgeschwindigkeit während des Spaziergangs. Sowohl auf gerader Strecke, wenn die Geschwindigkeiten beider Personen gleich sind (in diesem Fall gilt $P=R=L$) als auch wenn ihre Geschwindigkeiten in Kurven abweichen. Kann diese einfache Formel auf die Rotation der beiden Räder eines Autos übertragen werden? Aber wie? Es scheint überraschend zu klingen, aber diese Antwort weiß man schon seit über 2000 Jahren. Tatsächlich ist die technische Realisierung dieser Formel vom arithmetischen Mittel überraschend einfach.

Differentialgetriebe

Stell dir zuerst vor, dass die Rotation der beiden Räder durch eine rotierende Scheibe, die eine rechte und eine linke Scheibe berühren, übertragen wird. Die Scheiben sind mit den Achsen verschweißt, wie in der unteren Abbildung zu sehen.

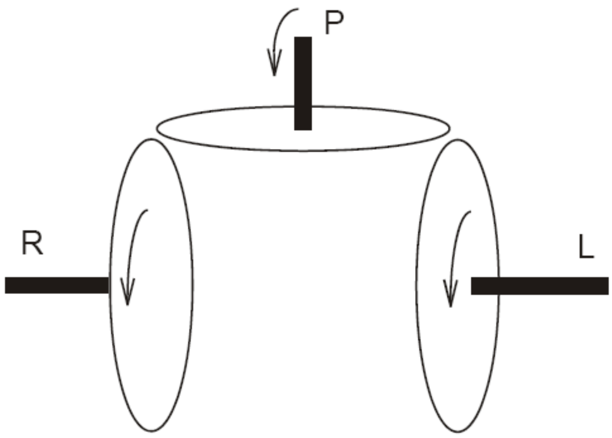

Abbildung 2: linke, rechte und antreibende Scheiben

Statt der Scheiben können wir uns Zahnräder vorstellen. Durch diese Konstruktion ist es offensichtlich, dass eine Rotation von P die gleiche Rotation auf das linke und das rechte Rad überträgt, also $P=R=L$. Dies scheint sehr weit weg von der gewünschten Gleichung

$$P = \frac{R+L}{2}$$

zu sein. Aber ist es nicht. Wenn wir mit der Beziehung

$$P - R = L - P = \frac{L-R}{2}$$

starten, können wir mit

$$\frac{L-R}{2}=X$$

leicht überprüfen, dass
$R = P - X$ und $L = P + X$
gelten muss.
Der Wert von X kann als freier Parameter in der Gleichung des arithmetischen Mittels

$$P=\frac{R+L}{2}$$

verstanden werden.
Diese Variable hat bei der technischen Realisierung des arithmetischen Mittels eine herausragende Bedeutung, da ein Verständnis darüber das Problem des Antriebs beider Räder komplett löst.
Im Einzelnen, wenn wir der antreibenden Scheibe erlauben würden, sich um ihre Achse zu drehen (beschrieben durch die Variable X), wie in der unteren Abbildung, dann haben wir bereits ein Modell eines Differentialgetriebes.

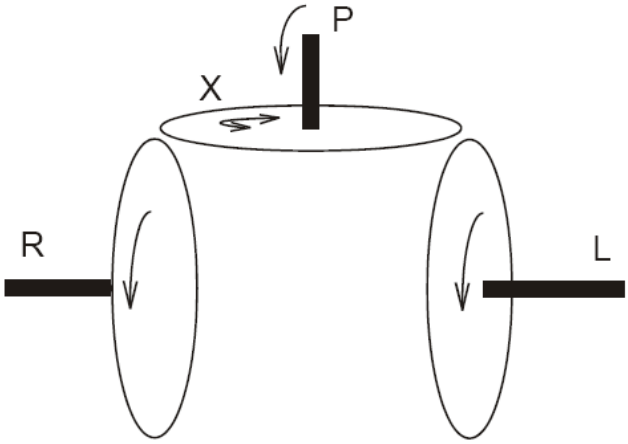

Abbildung 3: rechte, linke und antreibende frei rotierbare Scheibe

Mit Blick auf die obige Abbildung, denken wir noch einmal über die Formel

$$P=\frac{R+L}{2}$$

nach.
Wenn sowohl rechte als auch linke Scheiben frei rotierbar sind, sorgt die antreibende Scheibe dafür, dass beide gleich schnell rotieren und die antreibende Scheibe selbst nicht rotiert (X=0). Wenn entweder die linke oder die rechte Scheibe angehalten (oder nur teilweise abgebremst) wird, wird die antreibende Scheibe anfangen in X-Richtung zu rotieren und die gegenüberliegende Scheibe wird noch schneller rotieren. Daher beschreibt die „Variable X“ die Übertragung der Rotation, zum Beispiel das Langsamer werden der rechten Scheibe und das damit zusammenhängende Schnellerwerden der linken Scheibe.
Die obige Abbildung zeigt das Wesentliche eines Differentialgetriebes und repräsentiert eine technische Realisierung einer einfachen, aber abstakten mathematischen Idee, des *arithmetischen Mittels*. Frei drehbare Antriebsscheiben sorgen dafür, dass der Widerstand auf die linken und rechten Achsen differenziert übertragen wird. Um so viel der Widerstand auf den Drehmoment des eines Rades kleiner wird, um so viel wird er beim anderen größer. Die Frage, wie man den Drehmoment des Motors durch die Gelenkwelle (Cardan driveshaft) auf die antreibenden Scheiben überträgt, ist nicht trivial, aber wenn man ledig-

lich die oben beschriebene Idee des arithmetischen Mittels betrachtet, ist diese Frage lediglich technischer Art.
Die untere Abbildung zeigt die Skizze eines echten (klassischen) Differentialgetriebes

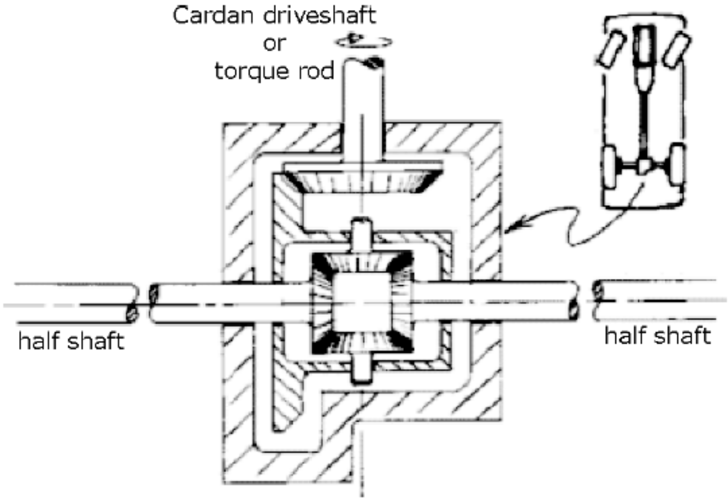

Abbildung 4: Schnitt eines Differentialgetriebes

Das Drehmoment eines Motors wird über die Gelenkwelle/Kardanwelle (Cardan shaft) oder auch „Drehmomentstange" (torque rod) genannt übertragen. Es ist interessant, dass der Name *Kardan* direkt nach dem italienischen Mathematiker, Physiker und Erfinder *Girolamo Cardano* (1501-1576) benannt wurde, der das *Kugelgelenk* erfunden hatte. Das Kugelgelenk ist ein wesentlicher Teil einer funktionierenden Kardanwelle, dieser hat aber nicht direkt mit unserer Idee eines Differentialgetriebes zu tun hat. Das Kugelgelenk ist auch eine geniale Idee, die eine einfache Lösung von „Rotationen um die Ecke" bietet. In anderen Worten ist es ein Gelenk, das zwei simultan rotierende Stangen verbindet, die in einem Winkel zwischen 90° und 180° zueinander stehen.


Abbildung 5: Kardangelenk – Kugelgelenk, Zeichnung und Lego Drehgelenk

Wir glauben, dass die Idee eines Differentialgetriebes ein sinnvolles, motivierendes, didaktisches Werkzeug sein kann. Es bietet eine nützliche, komplexe, aber doch einfache technische und intuitive Idee, von der wir die Bedeutungen sonst sehr abstrakter mathematischer Ideen, ableiten und nachvollziehen können. Selbst für Mathematiker kann diese einfache Idee des arithmetischen Mittels einige recht nichttriviale Fragen aufwerfen. Des Weiteren können abstrakte Ideen durch wohlbekannte Fragen, die mit den gemeinsamen Erfahrungen beim Fahren und Abbiegen zusammenhängen, intuitive und technische Bedeutungen bekommen. Man kann heutzutage einfach experimentieren, selbst Lego (Technik) bietet anspruchsvolle aber dennoch einfache Modelle von Elementen wie einem Differentialgetriebe.

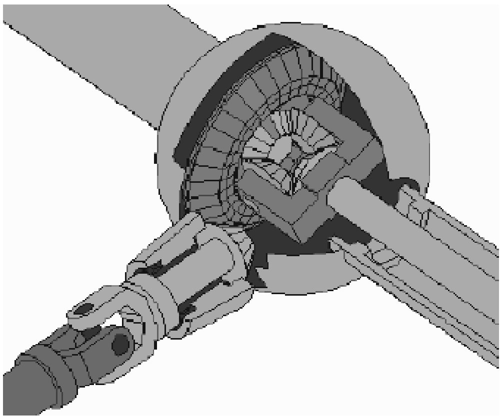 

Abbildung 6: Zeichnung eines Differentialgetriebes mit Kugelgelenk und Lego Modell eines Differentials

Arithmetisches Mittel und Fahren im Schnee

Viele Leute haben schon mit der Funktionsweise eines Differentialgetriebes ihre Erfahrungen gemacht. Das könnte der Traktor oder der Jeep, wie am Anfang dieses Artikels, aber meist leider eher auf unangenehme Weise, nämlich dann, wenn man mit dem Auto auf Schnee fährt. Es passiert sehr einfach, dass wir beim Fahren auf einer verschneiten Straße machtlos sind, weil wir das Auto nicht mehr bewegen können. Der Motor treibt hilflos nur eines der beiden Räder an, welches frei auf dem weichen Schnee dreht. Meist geschieht das, wenn das Auto auf einer Seite lehnt und was auch immer wir tun, das Auto immer stärker in den Schnee sinkt. Jedes Mal dreht sich nur ein Rad und das ist das Falsche. Wenn das Rad auf der Seite drehen würde, wo das Auto hin geneigt ist, dann wäre die Kraft stark genug, um das Auto fortzubewegen… Das geschieht dann, wenn wir starke Hilfe bekommen und kräftige Jungs versuchen, diese Seite anzuheben. Zur gleichen Zeit könnten sie die andere Seite runterdrücken, um auf das durchdrehende Rad Druck auszuüben… Manchmal hilft das, aber häufiger passiert es, dass die Änderung der Neigung des Autos das andere Rad durchdrehen lässt. Das ist genau das Gegenteil eines nützlichen Differentialgetriebes. Das Differentialgetriebe sorgt immer dafür, dass das einfacher rotierbarere Rad durchdreht. Natürlich kann all dieses Ringen einfach durch die Formel des arithmetischen Mittels erklärt werden

$$P = \frac{R + L}{2}$$

Diese Gedanken können zur einer aufschlussreichen Einführung anderer mathematischen Kapitel dienen, z.B. Gleichungssysteme. Nämlich, betrachten wir P als gegeben an (konstant – Leistung des Motors), dann ist das ein wirklich gutes und einfaches Beispiel, dass uns durch diese eine Gleichung lediglich sagt, in welcher Beziehung diese zwei Variablen stehen und nicht ihre absoluten Werte. Daraus entsteht die Notwendigkeit zweier Gleichungen, um zwei gegebene Variablen zu lösen.

Es gibt für Schülerinnen und Schüler weitere interessante Fragestellungen. Zum Beispiel: Gegeben sei ein Auto mit abgeschaltetem Motor in eingelegtem Vorwärtsgang, die Handbremse ist nicht angezogen: Kann es vorwärts bewegt werden? Aus Erfahrung würden viele korrekt antworten, dass es nicht nach vorne bewegt werden kann… aber wenige würden verstehen, wie dies mit Hilfe der Gleichung

$$P = \frac{R+L}{2}$$

erklärt werden kann.
Die nächste Frage gibt dafür eine einfache Erklärung.
Das Auto sei dasselbe wie vorher, nur dass es diesmal nicht auf dem Boden, sondern auf einer Hebebühne sei. Kann ein antreibendes Rad von Hand bewegt werden?
Es ist sehr interessant, dass normalerweise nur „technisch versierte Experten" diese Frage korrekt beantworten. Selbst Mathematiklehrer, denen diese Idee auf Fortbildungen vorgestellt wurde, werden durch ihre Erfahrungen fehlgeleitet. In der oben geschilderten Lage kann das Rad leicht gedreht werden …, während das Andere in entgegen gesetzter Richtung dreht. Natürlich, da der Motor aus ist und das Auto im Vorwärtsgang, muss P in unserer Gleichung

$$P = \frac{R+L}{2}$$

gleich Null sein. Also ist *R=-L*. Also wie kann es sein, dass ein eingelegter Gang bei einem stehenden Auto als Bremse wirkt? Ja klar, ein Auto vorwärts oder rückwärts zu bewegen, würde bedeuten, dass sowohl linkes als auch rechtes Rad sich in dieselbe Richtung bewegt. Ist nun *P=0*, kann L das gleiche Vorzeichen wie R nur haben, wenn beide Null sind.

Differential, Geradlinigkeit und Geodäte[1]

Es ist interessant, wie solch eine einfache Idee weiter entwickelt werden kann zu einem wunderbar intuitiven Verständnis der Geodäte aus der abstrakten Differentialgeometrie; ein für Universitätsstudenten schweres Thema. Mit Schülerinnen und Schülern kann man jedoch eine Debatte anleiten, was den *Geradlinigkeit* in Wirklichkeit heißt. In Mathematik wissen wir, was eine Gerade ist, aber in Wirklichkeit, kennen wir irgendetwas, das „gerader" ist als der „Äquatorkreis". Von dem ausgehend ist es einfach *„Geradlinigkeit"* als kürzeste Strecke abzuleiten… Natürlich auf einer Ebene ist dies eine Gerade. Auf einer Kugel kann *Geradlinigkeit* am besten durch große Kreise beschrieben werden. Dies erklärt auch, warum Langstreckenflugzeuge auf unseren gewöhnlichen Karten „komisch geschwungene Kurven" fliegen. Es brauchte für die Menschheit eine lange Zeit, um zu verstehen, dass eine Tischkante für einen Menschen nicht geradliniger ist, als ein kleinerer Autobahnring für eine Ameise. Auf einer Oberfläche, die unserer Erfahrung nach flach ist, aber wegen unserer begrenzten Wahrnehmung die Krümmung unbekannt bleibt, definieren wir Geradlinigkeit als *kürzeste Wegstrecke*. Die kürzesten Wegstrecken werden Geodäte genannt. Was hat dies mit unserem Differentialgetriebe zu tun? Wie ganz am Anfang erwähnt, fährt ein Traktor oder Jeep mit Differentialsperre nur geradeaus; genauso wie ein einfaches Legomodell mit zwei Rädern auf der gleichen Achse, das bei vorsichtigem Anschubsen nur gerade aus geht. Aber was passiert, wenn die „Fahrstrecke" nicht eben ist? Dann würde unser Fahrzeug den wunderbaren, intuitiven Pfad der Geodäte folgen… und würde uns viele weitere Fragen aufwerfen, die unsere Vorstellungen anregen und unser Verständnis herausfordern.

Historische Bemerkungen

Es ist nicht bekannt, wer den Mechanismus des Differentialgetriebes erfunden hat. Es erscheint offensichtlich, dass die Idee viel älter ist als Leonardo da Vincis (1452-1519) Erfindungen. Der britische Erfinder James Starley (1830-1881), bekannt als der „Vater der Fahrradindustrie", benutzte um 1850 den Mechanismus des Differentialgetriebes in einer

[1] lokal kürzeste Verbindungskurve zweier Punkte

speziellen Nähmaschine. 1877 benutzte er das Differentialgetriebe bei einem Straßenfahrzeug. Dort wurde es zum ersten Mal wahrscheinlich vom Deutschen Rudolph Ackermann im Jahre 1810 verwendet. Viele komplexere mechanische Geräte, die Differentialgetriebe enthalten, sind viel, viel älter. Funde aus China belegen, dass diese Mechanismen bis ins Jahre 300 n.Chr. zurück reichen. Im Jahre 1900 wurde ein extrem hochentwickelter **Antikythera Mechanismus** (nach der nahegelegenen griechischen Insel Antikythera, in dessen Nähe dieser gefunden wurde) in einem Schiffwrack gefunden. Der Mechanismus wurde sorgfältig geplant und aus Bronze und Holz gebaut. Es war eine Art astrologischer Computer, um Positionen von Planeten und Sterne zu bestimmen. Und das faszinierendste an diesem Gerät, das ca. 125 vor Christus gebaut wurde, ist, dass es einen Mechanismus eines Differentialgetriebes enthält. Das Gerät ist in der Bronzesammlung des nationalen archäologischen Museums in Athen ausgestellt. Mehrere Nachbildungen wurden angefertigt und sind auf der ganzen Welt ausgestellt, meist in Computermuseen (wie zum Beispiel im American Computer Museum in Bozeman, Montana).

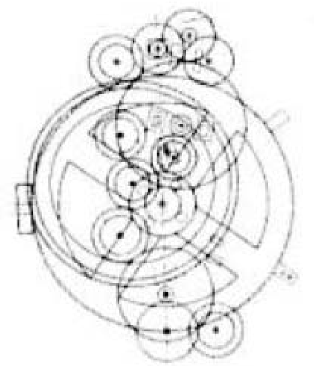

Abbildung 7: Das Hauptteil des Antikythera Mechanismus (~125 v.Chr.) und sein nachgebildeter Bauplan

Zur Unterrichtsgestaltung

Ein sehr motivierender und praktischer Zugang zum Verständnis des arithmetischen Mittels bieten Legomodelle. Mit diesen können viele der vorigen Fragen und Kommentare intuitiv verstanden werden. Es ist recht schwierig genügend Legomodelle aufzutreiben, so dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten können, aber es lohnt sich. Am besten jeder Schüler oder zwei Schüler zusammen bauen ein Modell und untersuchen dieses. Und wir sollten langsam anfangen. Es ist eine didaktische Herausforderung diese „Wägen“ zu bauen; mit zwei Rädern auf einer Achse oder auf Separaten, wie oben erwähnt. Das Experimentieren mit solchen „Wägen“ und klug ausgeführten „Strecken zu zweit“, durch diese man die unterschiedlichen Geschwindigkeiten beobachten kann, oder „nicht funktionierenden gesellschaftlichen Differentiale“ können eine unterhaltsame aber auch wertvolle Unterrichtsstunde bieten. Die oben genannten Lego Differentiale sind in einigen Lego Technik Baukästen zu finden. Außerdem können sie als spezielle Schulsets von Lego erworben werden.

interaktive Simulation

Interaktive Computersimulationen eines Differentials können im Internet angeschaut und studiert werden.

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung (Mitteilung) trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.