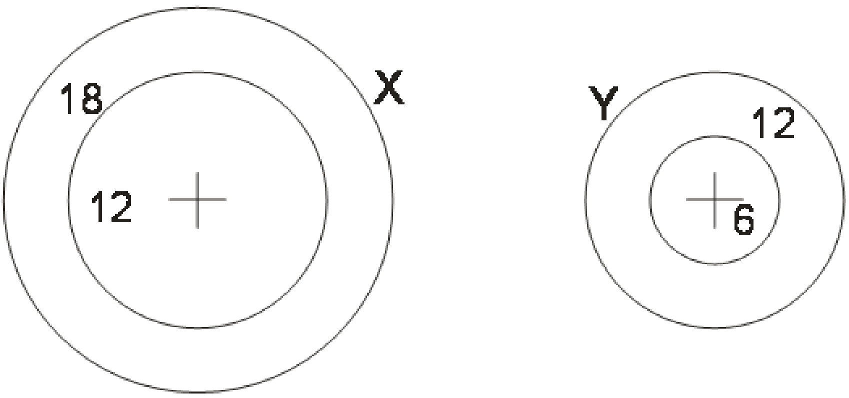
Učno gradivo

Prestave na kolesu kot razmerja

Pred 30 ali 40 leti kolesa niso imela prestav. Danes imajo veliko prestav in tako lahko s prestavljanjem dosežemo optimalo hitrost vožnje.
Skoraj vsakdo ima kolo s sofisticiranim mehanizmom prestav. Moderna imajo tudi do 32 prestav, ponavadi pa je to število 21, zato se v tej učni uri omejimo na tako kolo. Že kmalu v otroštvu smo se naučili prestavljati na kolesu, da bi si olajšali vožnjo v hrib ali da bi po ravnem vozili čim hitreje.
S prestavnim mehanizmom izbiramo med tremi zobniki na osovini pri pedalih in med sedmimi na osovini zadnjega kolesa. Videli bomo, da pri različnih izbirah dosežemo, da se zadnje kolo zavrti med enkrat in štirikrat za vsak obrat pedal. En obrat kolesa na en obrat pedala pomeni počasno gibanje, ki je primerno za vožnjo po hribu navzgor. Štirje obrati kolesa na en obrat pedal pa pomeni hitro vožnjo. Ali lahko to razložimo s pomočjo matematike?
Če bomo v razred pripeljali pravo kolo, bomo naredili izkušnjo in učenje bolj živo. Danes lahko sicer uporabljamo tudi računalnike za simulacijo pojavov iz realnega življenja.
Spletna verzija te učne ure z računalniško simulacijo se nahaja na spletu: http://uc.fmf.uni-lj.si/com/BicGear/bicgear.html.

Preproste enačbe

Pa začnimo s poenostavitvijo. Predpostavimo, da imamo enostaven mehanizem prestav in samo dve prestavi na vsaki osovini. Recimo, da imata zobnika pri pedalu 18 in 12 zob, zadnji zobnik pa 12 in 6 zob. Zelo naravno se zdi, da je rotacija pedal neodvisna spremenljivka **x** in da je rotacija zadnjega kolesa in s tem tudi hitrost kolesa odvisna spremenljivka **y**.

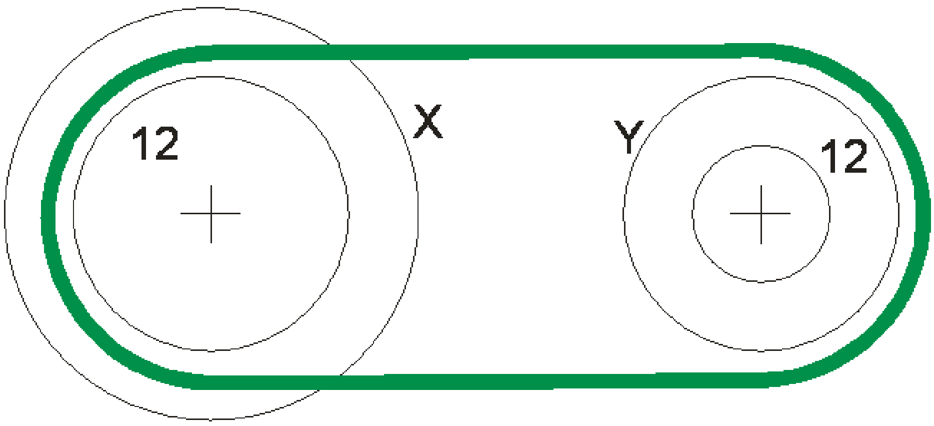


Slika 1: Sprednja zobnika z 18 in 12 zobmi in zadnja zobnika z 12 in 6 zobmi.

V matematiki pogosto rešujemo enačbo oblike:

$$3\,x = 12.$$

Kako to naredimo? Enačbo delimo s 3 ... in dobimo, da je $x = 4$. V tem ni veliko razumevanja. A če enačbo razumemo kot nastavitev kolesa, zahteva globlje razumevanje. Ali bolje, nudi možnost, da se zavedamo globokega pomena, ki ga enačba podaja.
Če veriga povezuje 12–zoba zobnika kot na sliki spodaj, je enačbo lahko zapisati.



Slika 2: Veriga povezuje 12–zoba zobnika.

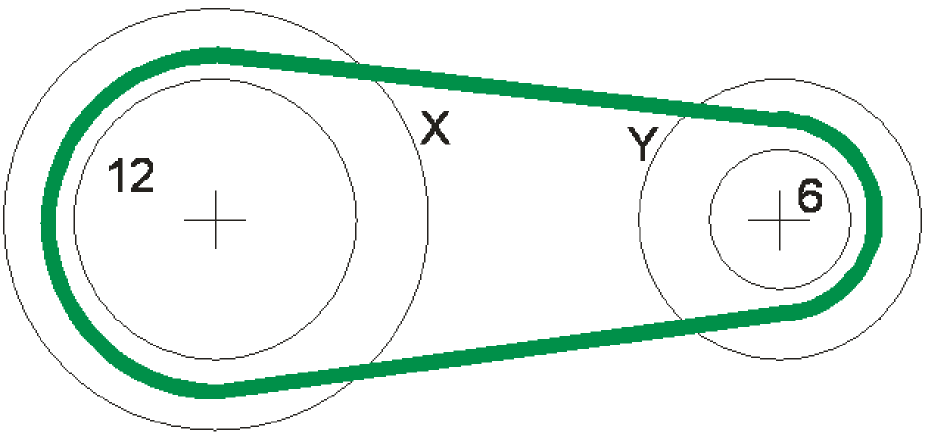
Enačba bo preprosto

$$x = y$$

ali

$$12\,x = 12\,y.$$

Ali znamo razložiti nastavitve, pri kateri zobnika nimata enakega števila zob? Začnimo s primerom spodaj.



Slika 3: Veriga povezuje 12–zobi zobnik spredaj s 6–zobim zobnikom zadaj.

Kaj je razmerje med **x** in **y** tokrat? Morda se šele na tem mestu zavemo pomena spremenljivk **x** in **y**. Kakšen pomen pravzaprav imata? Naravno je definirati **x** in **y** kot število rotacij. Zato moramo prešteti zobe na zobniku, pomnožiti to število s številom rotacij (to je seveda lahko manjše od 1) in tako dobimo enačbo

$$12\,x = 6\,y$$

in

$$2\,x = y,$$

saj veriga naredi, da je 'število zob, ki se premaknejo' enako. Če se to zdi očitno, naj učitelj prepusti dijakom, da sami izpeljejo enačbo iz zgornje slike, ne da bi jim dal namig. Pametnejši dijaki bodo mogoče povedali pravilno enačbo, toda bolj verjetno zato, ker vejo kakšna mora biti, ne pa, ker bi razumeli odnos, ki je podan s povezavo med zobniki.

Razmerja prestav kolesa

Najboljše bi bilo, če bi nadaljevali s fizičnim delom na resničnem kolesu in šteli zobe na obeh zobnikih. Za to predstavitev smo prešteli zobe na sprednjem in zadnjem zobniku običajnega kolesa in dobili števila, ki smo jih vnesli v spodnjo tabelo. Tukaj 1, 2, 3 in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pomenijo sprednje in zadnje prestave in števila 30, 38, 50 in 34, 26, 24, 22, 20, 18, 15 pomenijo števila zob na posameznem zobniku.

	spredaj	1	2	3
zadaj		30	38	50
1	34			
2	26			
3	24			
4	22			
5	20			
6	18			
7	15			

Slika 4: Vodoravno imamo sprednje, navpično pa zadnje zobnike.

Kot smo videli na slikah 1-3, so lahko vse informacije o prestavah podane z razmerjem med številom sprednjih in zadnjih zob na ustreznih zobnikih. Ta razmerja nam povejo, koliko rotacij kolesa dobimo z eno rotacijo pedal. Izračunajmo razmerja in izpolnimo tabelo.

	spredaj	1	2	3
zadaj		30	38	50
1	34	0.88	1.12	1.47
2	26	1.15	1.46	1.92
3	24	1.25	1.58	2.08
4	22	1.36	1.73	2.27
5	20	1.50	1.90	2.50
6	18	1.67	2.11	2.78
7	15	2.00	2.53	3.33

Slika 5: Razmerja določajo prestave.

Razmerja v tabeli nam povejo, koliko rotacij naredi kolo, ko enkrat zavrtimo pedala. Zdaj lahko izmerimo premer kolesa (v našem primeru 70.5 cm) in predpostavimo, da kolesarimo s hitrostjo en obrat pedal na sekundo. Enostaven a realen izračun nam pove, da nam en obrat kolesa na sekundo da potovalno hitrost:

70.5 x 3.14 x 3600 cm/h = 7.97 km/h.

Če pomnožimo zgornja razmerja s to hitrostjo, dobimo tabelo hitrosti (zaokroženih) v km/h:

	spredaj	1	2	3
zadaj		30	38	50
1	34	7.0	8.9	11.7
2	26	9.2	11.7	15.3
3	24	10.0	12.6	16.6
4	22	10.9	13.8	18.1
5	20	12.0	15.1	20.0
6	18	13.3	16.8	22.1
7	15	15.9	20.2	26.6

Slika 6: Hitrosti v km/h v odvisnosti od prestave, če poganjamo kolo s hitrostjo enega obrata na sekundo.

Primerjava števil v katerikoli od teh tabel nam pove pravi vrstni red 21 prestav na kolesu. Natančno si poglejmo števila v tabeli razmerij in dopolnimo s števili od 1 do 21 v vrstnem redu, kot si prestave sledijo.

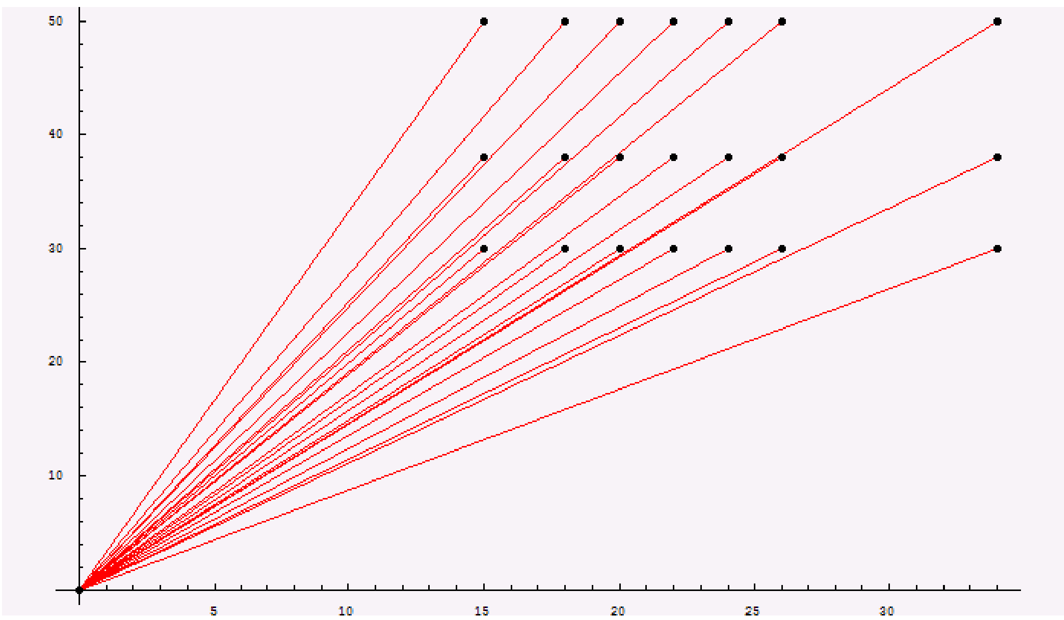
	spredaj	1	2	3
zadaj		30	38	50
1	34	0.88 1	1.12 2	1.47 7
2	26	1.15 3	1.46 6	1.92 13
3	24	1.25 4	1.58 9	2.08 15
4	22	1.36 5	1.73 11	2.27 17
5	20	1.50 8	1.90 12	2.50 18
6	18	1.67 10	2.11 16	2.78 20
7	15	2.00 14	2.53 19	3.33 21

Slika 7: Enaindvajset zaporednih števil.

Na tem mestu pomislimo, ali imamo zares 21 prestav na našem kolesu. Teoretično da, toda ali znamo razložiti čudno zaporedje prestav? Kolikokrat moramo zamenjati zobnik, da damo iz sedme prestave v osmo? Šestkrat? Ja. Če bi hoteli slediti zaporedju prestav od prve do enaindvajsete v 'pravem' vrstnem redu, bi morali zamenjati zobnike 58 krat. To gotovo ni praktično in zelo malo ljudi uporablja vseh 21 prestav. Razložimo situacijo prestav na kolesu s preprosto matematiko.

Naklon premic in prestave na kolesu

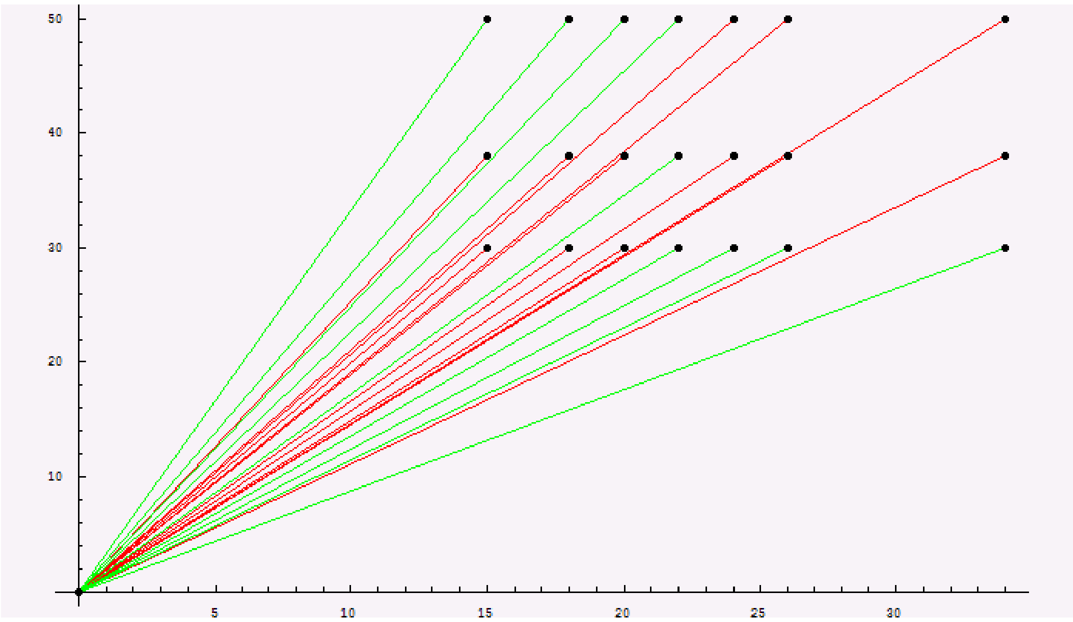
Ker vemo, da kvocienti predstavljajo dejanske hitrosti, narišimo točke v običajen koordinatni sistem, kjer števila zob zadnjega zobnika nanašamo na x-os in število zob na sprednjem zobniku na y-os. Strmejši kot je naklon, višja je hitrost. Ker smo navajeni urejati in šteti hitrosti od manjše k večjim, moramo poudariti, da grejo sprednje prestave na našem grafu od 1 do 3 v standardni, dvigajoči se smeri, medtem ko so zadnje prestave na našem grafu od 1 do 7 urejene od desne proti levi.



Slika 8: Kvocienti kot nagnjenost črt.

Na zgornjem grafu je preprosto razložiti prestave, prestavljanje in hitrosti. Različne točke pomenijo različne prestave. Prestavljanje iz ene prestave v drugo pomeni premikanje od ene točke do druge z ali navpičnimi ali vodoravnimi premiki. Premikanje za eno enoto navpično ali vodoravno pomeni prestavljanje za eno prestavo. Vodoraven premik pomeni prestavljanje na zadnjem kolesu in navpičen premik pomeni prestavljanje na sprednjih zobnikih. Na grafu jasno vidimo, da so nekateri nakloni skoraj enaki. Seveda, drugačen par števil lahko da enak ali podoben kvocient. V našem primeru so vsi kvocienti različni, a so razlike med nekaterimi zelo majhne. V realnosti to pomeni, da je hitrost vožnje s kolesom lahko praktično enaka, čeprav imamo različne kombinacije sprednjih in zadnjih prestav. Npr. tretja sprednja in prva zadnja predstavljata praktično isti kvocient in isto hitrost kot druga sprednja in druga zadnja prestava.

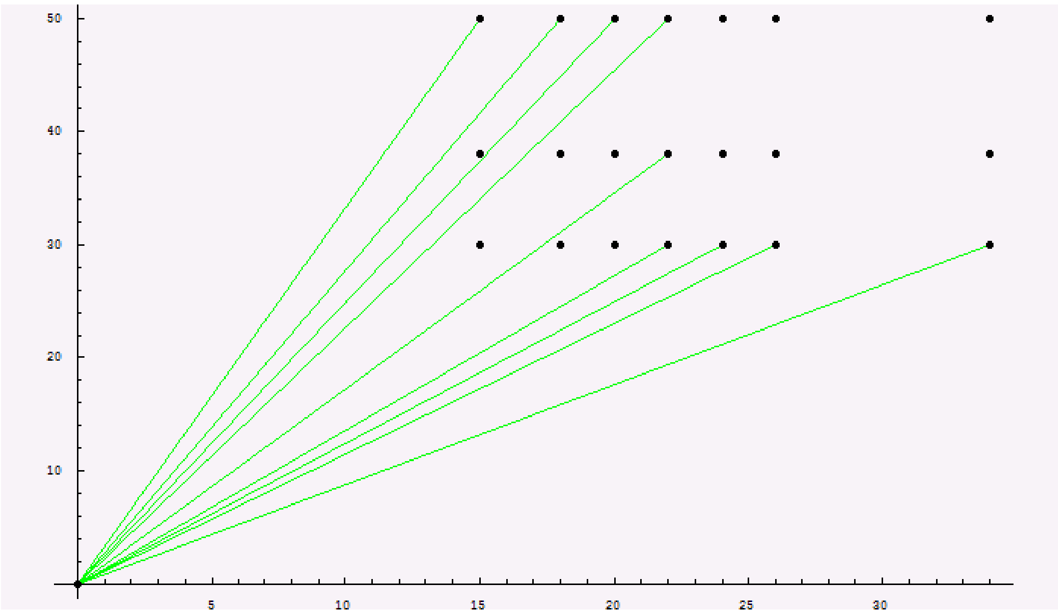
Tako ima naše kolo mnogo hitrosti, a so nekatere od njih praktično enake. Zato (kot se to zgodi v resničnem življenju) vzamemo samo nekaj kvocientov, ki dobro pokrijejo interval razmerij od najmanjše do največje. Na spodnji sliki te predstavimo z zeleno črto.



Slika 9: Dejansko ne uporabljamo vseh prestav.

Z izpustitvijo nekaterih prestav smo prihranili veliko prestavljanja. Prestave, ki smo jih izbrali, seveda niso edina možna izbira. V tem trenutku se lahko razvije diskusija, ki poglablja razumevanje situacije in še posebej zgornjega grafa. Učitelji in dijaki lahko predstavijo svoje navade prestavljanja. Odkrito lahko zaključimo, da se nam zdi najbolj razumna navada prestavljanja monotona pot od 'spodaj-desno' do 'zgoraj-levo'.

Končno predstavimo naš 'očiščeni' graf, kjer imamo samo devet prestav.



Slika 10: Devet prestav in osem prestavljanj.

Potovanje od zgornje leve do spodnje desne prestave, lahko opišemo kot zaporedje: 'desno-desno-desno-dol-dol-desno-desno-desno'. Precej očitno je, da bi npr. prestavljanje 'desno-desno-dol-desno-desno-dol-desno-desno' bilo tudi smiselno. Pogovor o različnih 'desno-dol' poteh na našem grafu je dober način za povečanje razumevanja koordinatnega sistema in pomena, ki ga graf prinese.

Interaktivna simulacija

Nekaj zanimivih interaktivnih simulacij predstavljenih idej si lahko ogledate na [spletu].

Ta projekt se financira s podporo Evropske komisije. Ta publikacija izraža le stališča avtorja ali avtorjev in Komisija ne odgovarja za kakršno koli uporabo v njej navedenih informacij.