

Opetusmateriaali

Aritmeettinen keskiarvo ja auton tasauspyörästä

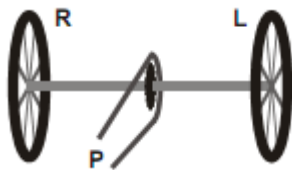
Auton tasauspyörästäön mekanismi (tasauspyörästäö) on tunnettu noin 2000 vuotta. Se esittelee nerokkaan teknisen keksinnön, joka ei ole muuta kuin yksinkertaisen matemaattisen aiheen, aritmeettinen keskiarvon, toteutus. Auton tasauspyörästäön tutkiminen tarjoaa käytännöllistä ja syvällistä tutustumista muuten hyvin abstraktiin muuttujakäsitteiden väliseen riippuvuuteen yksinkertaisissa matemaattisissa yhtälöissä. Nettiversio oppitunnista: <http://uc.fmf.uni-lj.si/com/dif/cdif.html>.

JOHDANTO

Me nautimme päivittäin teknologian tarjoamista mukavuuksista, ja auton tasauspyörästäö on tärkeä tekninen laite, jota me kaikki käytämme säännöllisesti. Mutta harvat tiedostavat sen olemassaolon, tai ovat koskaan tutkineet tarkemmin tätä yksinkertaista teknistä aihetta. Vielä harvemmat ovat koskaan edes ajatelleet sen luonnollista yhteyttä hyvin yksinkertaisiin matemaattisiin oivalluksiin.

Kenelle tahansa, joka yrittää ymmärtää matematiikkaa, voi olla suureksi avuksi, jos abstraktille matemaattiselle aiheelle annetaan syvempi merkitys, tai esitellään sen mekaaninen toteutus joka tarjoaa meille elämisen mukavuutta.

Tiedämme, että auto saa tehonsa moottorista. Mutta miten? Kuinka moottorin teho (rotaatio) siirretään pyöriin, jotka saavat auton liikkumaan? Polkupyörässä käytetään ketjuja, jotka siirtävät polkimien pyörinnän takapyörään. Eikö se toimi samalla tavalla autossa, vain niin että voimanlähteenä toimii moottori eikä lihaksemme? No, ensimmäiset autot tosiaan toimivat sillä tavalla. Ketjua käyttämällä rotaatio siirrettiin moottorista taka-askeliin. Joten molemmat, sekä oikea että vasen pyörä, pyörivät samanaikaisesti ja saivat ajoneuvon liikkumaan.



Kuvio 1. Oikea ja vasen pyörä ovat kiinnittyneet samaan pyörivään akseliin.

Katsomalla kuvaa ottamatta huomioon mahdollista voimansiirtosuhdetta, ja merkiten tehoa (moottorin rotaatiota) P:llä, merkiten oikean pyörän rotaatiota R:llä ja vasemman pyörän rotaatiota L:llä, saamme hyvin yksinkertaisen yhtälön (yhtälöjärjestelmä):

$$P = R = L$$

Mutta toimiiko auto samalla tavalla? No, ensimmäiset autot toimivat niin, ja siksi niiden ohjaaminen oli hyvin vaikeaa. Vasemmalle kääntyessä oikea pyörä pyöri pidemmän matkaa kuin vasen, ja oikealle kääntyessä päinvastoin. Teoreettisesti yllä olevalla

mekanismeilla ohjaaminen oli mahdotonta, koska molemmat pyörät pyörivät identtisesti ja näin ollen ne kulkevat saman matkan. Todellisuudessa ohjaus tapahtuu niin, että molempien pyörien täytyy hieman liukua maanpinnalla. Se tekee ohjauksesta tällä mekanismeilla fyysisesti melko rankkaa. Nykyisin sama ilmiö ilmenee, kun ajaa traktoria tai maastoautoa, jossa on tasauspyörästä lukko. Vaikeakulkuisella maaperällä esimerkiksi maanviljelijöiden täytyy käyttää traktoreitaan tasauspyörästä lukon kanssa kasvattaakseen traktorin voimaa. Mutta ajaessa tasauspyörästä lukko päällä, ohjauspyörän liikuttaminen oikealle tai vasemmalle on todella rankkaa. Todellisuudessa monet traktorionnettomuudet johtuvat kuljettajan voimattomuudesta kääntää traktoria, kun se on tasauspyörästä lukkoasennossa. Joskus ohjauspyörä ja ohjauspyörät, yleensä etupyörät, saattavat olla käännettynä oikealle, mutta traktori, jossa on tasauspyörästä lukko puskee suoraan eteenpäin.

Kuinka tämä ongelma ratkaistaan? Yksinkertainen ratkaisu olisi välittää moottorin rotaatio vain toiseen kahdesta (oikeaan tai vasempaan) pyörästä. Siten ohjaus olisi helppoa, mutta tämän päivän mukavan ajamisen jälkeen ajaminen ja ohjaus olisivat todella outoa ja vaarallista. Esimerkiksi kun voima on oikeassa pyörässä, ajaminen kääntyen vasemmalle tuntuisi kuin hidastaisi, kun taas käänös oikealle olisi todellinen taidonnäyte (auto tuntuisi kiihdyttävän oikeassa käänöksessä).

SOSIAALINEN TASAUSPYÖRÄSTÖ

Kun ajatellaan meidän 'sisäänrakennettua' sosiaalista tasauspyörästäämme, se saattaakin olla teknisesti ja matemaattisesti hyvin intuitiivinen ja helppo ymmärtää. Kuten auton tasauspyörästäkin kanssa, emme tiedä siitä mitään niin kauan kuin se toimii kunnolla, mutta tunnemme sen hyvinkin sitten, kun se rikkoutuu.

Voidaan sanoa, että jokaisella normaalisti kehittyneellä ihmisellä on 'sosiaalinen tasauspyörästä'. Kuvittele pariskunta, joka kävelee vierekkäin, keskustellen ja ajattelematta polkua, jota he mahdollisesti kävelevät mukavassa puistossa, tai jopa kävellen kotiin käyttäen rappusia aina neljänteen kerrokseen asti, ja tehden tiukkoja käänöksiä jokaisella porrastasanteella. Käännyttäessä vasemmalle tai oikealle molemmat kävelijät mukauttaisivat (alitajuntaisesti) vauhtinsa, jotta pysyvät puolisonsa vierellä. Jos ajatellaan, mitä tapahtuu, kun käännytään, on melko ilmeistä, että esimerkiksi kääntyessä oikealle, oikeanpuoleinen kävelijä hidastaisi vähän ja vasemman puoleinen kävelijä kiihdyttäisi hieman, ja heidän keskiarvoinen nopeutensa pysyisi muuttumattomana.

Kuten yllä on mainittu, jos sosiaalinen tasauspyörästä ei toimi kunnolla, sen huomaa helposti. Yleensä niin tapahtuu "tärkeiden" ihmisten kanssa, jotka ovat liian "tärkeitä" sovittaakseen omaa vauhtiaan "alempiarvoisen" vauhtiin, ja he ylläpitävät vauhtiaan myös samalla kun he kääntyvät...

On todella hauskaa tarkkailla sellaista tapahtumaa kun esimerkiksi "alempiarvoinen" opiskelija on "tärkeän" professorin oikealla puolella, jolla on rikkoutunut sosiaalinen tasauspyörästä, ja joka kääntyy vasemmalle ja siten pysyy lähes paikoillaan kääntyessä oikealle.

ARITMEETTINEN KESKIARVO

Normaali kävelevä pariskunta kääntyy vasemmalle niin, että vasemmanpuoleinen kävelijä hidastaa ja oikeanpuoleinen kiihdyttää vähän. Heidän keskiarvoinen nopeutensa pysyy muuttumattomana. Olkoon P on heidän keskiarvoinen nopeutensa, R on oikeanpuolisen kävelijän nopeus ja L on vasemmanpuolisen kävelijän nopeus, joten heidän 'sosiaalinen tasauspyörästänsä' voidaan kuvata yksinkertaisella yhtälöllä:

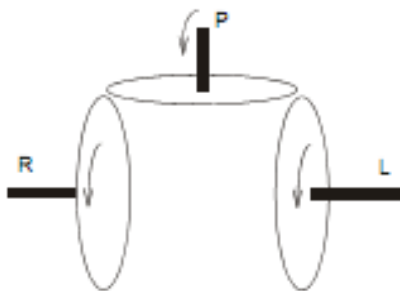
$$P = \frac{R + L}{2}$$

Yhtälö kuvaa mukavasti ja täysin miten kävelijöiden kävelynopeudet ovat suhteessa toisiinsa, nopeuksien keskiarvon koko kävelymatkan ajalta, silloin kun he kulkevat suoraan ja heidän nopeutensa ovat samat (tässä $P = R = L$). Yhtälö on voimassa myös kun he kulkevat mutkassa eri tahtiin.

Voiko tätä yksinkertaista kaavaa soveltaa mekaanisesti auton oikean ja vasemman pyörän liikkeen kuvaamiseen? Saattaa olla yllättävää, mutta vastaus tähän kysymykseen on tiedetty jo yli 2000 vuotta. Itse asiassa kaavan mekaaninen toteutus aritmeettiselle keskiarvolle on yllättävän yksinkertainen.

TASAUSPYÖRÄSTÖ

Kuvittele ensin, että oikean ja vasemman pyörän yhtä suuri voima saavutetaan pyöräyttämällä levyissä olevaa kahvaa (L ja R), jotka on kiinnitetty kummankin levyn akselien päihin, kuten alla olevassa kuvassa.



Kuvio 2. Oikea, vasen ja niiden välissä oleva levy (esim. kartiopyörä)

Kuvitellaan sitten levyn paikalle hammasrattaat. On ilmeistä, että mekanismin avulla, P – kahvan pyöräyttäminen johtaisi saisi vasemman ja oikean pyörän samansuuntaiseen liikkeeseen, näin ollen $P = R = L$. Tämä tuntuu olevan vielä kaukana toivotusta yhtälöstä:

$$P = \frac{R + L}{2}$$

Mutta oikeastaan niin ei ole. Aloittaen tällä kaavalla voimme helposti tarkastaa, että merkiten

$$P - R = L - P = \frac{L - R}{2} = X$$

meillä on

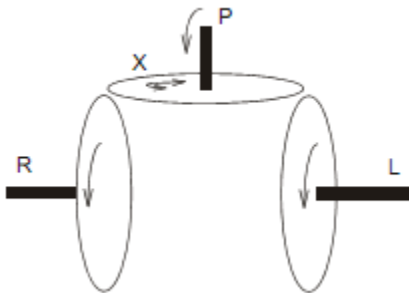
$$R = p - X \text{ ja } L = P + X$$

X:n arvo voidaan ymmärtää vapaana parametrina suhteessa kolmeen muuttujaan yhdessä yhtälössä.

$$P = \frac{R + L}{2}$$

Muuttuja X:llä on niin tärkeä rooli aritmeettisen keskiarvon mekaanisessa toteutuksessa, että sen ymmärtäminen ratkaisee täydellisesti autonpyörien voimaongelman.

Jos tiedetään, että meidän kartiopyörämme alla olevassa kuvassa on vapaasti pyörivä (vapaa muuttuja X) kahvan ympäri, meillä jo on malli tasauspyörästä.



Kuvio 3. Oikea, vasen ja vapaasti pyörivät levyt

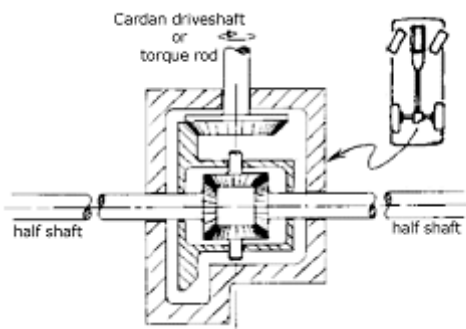
Katsomalla yllä olevaa kuvaa mietitään taas kaavaa

$$P = \frac{R + L}{2}$$

Jos molemmat, sekä oikea ja vasen levy pyörivät vapaasti, kahvan painaminen (rotaatio) saavat molemmat levyt pyörimään tasaisesti ja niiden välissä oleva levy ei pyöri ($X=0$). Jos joko oikea tai vasen levy pysäytetään (tai sitä vain jarrutetaan osittain), välilevy alkaa pyöriä kun painamme (pyöritämme) kahvaa ja vastakkainen levy pyörii vielä nopeammin.

Näin ollen, 'muuttuja X' muuttaa esimerkiksi oikea levyn hidastumisen vasemman levyn kiihtymiseksi.

Yllä oleva yksinkertaisen piirros havainnollistaa tasauspyörästön perusolemuksen, ja siinä on mekaanisesti toteutettu yksinkertainen, mutta käsitteenä abstrakti aritmeettinen keskiarvo. Vapaasti pyörivä levy huolehtii resistanssin erilaistamisesta vasemmalle ja oikealle akselille. Mitä enemmän yhden pyörän vääntömomentti (vasen tai oikea) vähenee resistanssista johtuen, sitä enemmän toinen kasvaa. Kysymys, kuinka siirtää moottorin vääntömomentti kardaniakselin kautta kartiopyörälle ei ole vaikea, mutta koskien tätä aihetta, tämä kysymys on vain tekninen. Alla olevassa kuvassa on piirros oikeasta (klassisesta) tasauspyörästöstä.



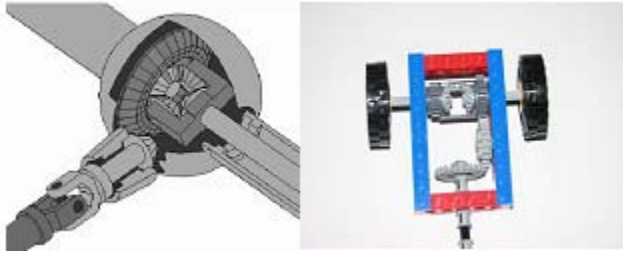
Kuvio 4. Tasauspyörästön profiili

Moottorin vääntömomentti välittyy vetoakselin kautta, jota kutsutaan myös nimellä vääntövarsi. Nimi kardani tulee suoraan italialaiselta matemaatikolta, fyysikolta ja keksijältä Girolamo Cardanolta (1501–1576), joka keksi kardaniakselin. Kardaniakseli on olennainen osa käyttökelpoista vääntövarsta, mutta se ei liity suoraan tasauspyörästöaiheeseen. Kardaniakseli on eräs niistä nerokkaista keksinnöistä, joka tarjoaa yksinkertaisen ratkaisun 'kulman ympäri pyörimiselle'. Toisin sanoen se on nivel, joka yhdistää kaksi samanaikaisesti pyörivää sauvaa, jotka on yhdistetty kulmaan, joka on 90 - 180 asteen välillä.



Kuvio 5. Kardani – kardaniakseli, piirros ja Legon pyörivä nivel

Uskomme, että tasauspyörästöaihe on käyttökelpoinen didaktisen motivoinnin väline. Se tarjoaa käytännöllisen, monimutkaisen ja toisaalta kuitenkin yksinkertaisen teknisen ja intuitiivisen aiheen, josta voimme päätellä ja pohtia syvempiä merkityksiä muutoin abstrakteille matemaattisille aiheille. Jopa matematiikan asiantuntijalle tämä yksinkertainen aritmeettisen keskiarvon aihe voi herättää useita melko tärkeitä kysymyksiä. Lisäksi abstrakteille aiheille voi antaa intuitiivisia ja teknisiä merkityksiä kysymällä kysymyksiä, jotka liittyvät yleisesti tunnettuun aiheeseen, ajamiseen. Niitä voidaan tutkia helposti, koska nykyisin jopa Lego (Technics) tarjoaa hienoja, mutta kuitenkin yksinkertaisia malleja monista laitteista, kuten tasauspyörästöstä.



Kuvio 6. Piirros tasauspyörästä, jossa on kardaaniakseli ja Legomalli tasauspyörästä

ARITMEETTINEN KESKIARVO JA AJAMINEN LUMESSA

Monilla ihmisillä on kokemuksia, jotka liittyvät toimivaan tasauspyörästmekanismiin. Se voi liittyä traktoriin tai maastoautoon kuten kerrottiin tämän artikkelin alussa, mutta useimmin ja valitettavasti kokemukset liittyvät auton ajamiseen lumessa. Usein käy niin, että kun ajaa lumessa, niin juuttuu paikoilleen, emmekä saa autoa enää liikkumaan. Moottori pyörittää avuttomasti yhtä pyöristä, joka vain liukuu sileässä lumessa. Yleensä tämä tapahtuu silloin, kun auto nojaa hieman toiselle sivulle, ja mitä tahansa yritämmekin, auto vajoaa vain syvemmälle lumeen. Yleensä vain yksi pyörä pyörii, ja sekin on väärä. Jos toisella puolella oleva pyörä pyörisi, voima saattaisi olla riittävä siihen, että auto liikkuisi eteenpäin...

Voi olla, että saamme apua ja vahvat miehet yrittävät nostaa auton sitä puolta, joka on kuormitettu, siksi koska auto on kallellaan. Samalla he saattavat työntää alas auton toista puolta laittaakseen painon pyörivälle pyörälle... Joskus se voi auttaa, mutta useammin tilanne on se, että nostamalla nojaavaa autoa toiselle puolelle vain siirtyy toiselta vapaasti pyörivältä pyörältä toiselle. No, tämä on tilanne, kun tasauspyörästä tekee juuri päinvastoin kuin mikä olisi meille hyvä. Tasauspyörästä saa aina helpommin pyöritettävän pyörän pyörimään. Tietenkin kaikki tämä paini voidaan helposti selittää aritmeettisen keskiarvon kaavalla.

Näitä ajatuksia voidaan käyttää aloituksena muissa matemaattisissa kappaleissa, kuten esimerkiksi yhtälöjärjestelmässä. Jos P on annettu (vakio – moottorin teho), tämä on todella hyvä ja yksinkertaisen esimerkki, joka kertoo, että yksi yhtälö pystyy kertomaan meille suhteen, mutta ei niitä absoluuttisia kahden muuttujan arvoja, jotka se yhdistää. Näin ollen on olemassa luonnollinen tarve kahteen yhtälöön kahden muuttujan päättämiseksi.

On muitakin kiinnostavia kysymyksiä, joita voi miettiä opiskelijoiden kanssa. Esim.: Auton moottori on pois päältä, ei käsijarruja ja vaihde on päällä: Voiko sitä työntää eteenpäin? Kokemuksesta monet vastaavat oikein, että autoa ei voi työntää.., mutta harvat ymmärtävät, kuinka tämän voi päätellä yhtälöstä:

$$P = \frac{R + L}{2}$$

Seuraava kysymys antaa yksinkertaisen tulokinnan siitä.

Antaa auton olla samassa asennossa kuin yllä, muttei maassa, kuvitellaan, että auto on nostettu ylös autotallissa. Voiko pyörää kääntää käsin ympäri?

On hyvin kiinnostavaa, että yleensä vain teknisesti lahjakkaat ammattilaiset vastaavat oikein tähän kysymykseen. Jopa matematiikanopettajat sekoittuvat ajatuksissaan liittyen heidän aiempaan kokemukseensa. Yllä olevassa asennossa pyörää voidaan pyöräyttää helposti ympäri, samalla kun vastapäinen pyörä pyörii vastakkaiseen suuntaan. Tietenkin koska auton moottori on pois päältä ja auto on ykkösvaihde-asennossa, P yhtälössämme

$$P = \frac{R + L}{2}$$

on pakotettu olemaan 0. Näin ollen $R = -L$. Tämä tarkoittaa sitä, että auton seisoessa, vaihteen pitäminen ykkösellä tai pakilla saa auton pysymään paikallaan tiellä. No, tietenkin, jos autoa liikutetaan eteen tai taaksepäin, se tarkoittaisi sitä, että sekä vasen että oikea pyörä kääntyvät samaan suuntaan, kun $P = 0$, R ja L voivat olla samanmerkkisiä jos ne ovat molemmat 0.

TASAUSPYÖRÄSTÖ, SUORUUDEN MÄÄRITELMÄ JA GEODEESI

On mielenkiintoista, että yksinkertaista aihetta voidaan kehittää edelleen, jotta ymmärretään monimutkainen ja abstrakti differentiaali geometrian käsite: geodeesi. Se on hankalaa yliopisto-opiskelijoille. Sitä ennen lukiolaiset voidaan pistää väittelemään, mitä "suoraan" tarkoittaa todellisuudessa. Matematiikassa tiedämme, mitä suora viiva tarkoittaa, mutta oikeassa elämässä, emme tiedä mitään, mikä on suurempi kuin päiväntasaaja. Tästä on helppoa päätellä suoruuksien määrittely lyhyimpänä etäisyytenä kahden pisteen välillä.

Tietenkin, lentokoneesta katsoen se on suora viiva. Pallolla suoruus voidaan kuvata parhaiten suurina ympyröinä. Tämä myös selittää, miksi pitkän matkan koneet tekevät 'outoja kaarevia reittejä' kartoillamme. Vei kauan, ennen kuin ihmiskunta käsitti että pöydän suora kulma ei ole sen suurempi kuin moottoritien mutka pienen kaupungin ympäri on muurahaiselle. Suoran viivan virallinen määrittely on melko monimutkainen ja abstrakti. Pinnalla, joka on meidän mielestämme 'tasainen' mutta joka onkin oikeastaan kaareva, pysyy tuntemattomana meille, määrittelemme suoruuksien lyhyimpänä välimatkana. Lyhyimmät polut ovat nimeltään geodeeseja. Mitä tekemistä tällä on meidän tasauspyörästömme kanssa? Kuten kerrottiin tämän artikkelin alussa, traktori tai maastoauto, jossa on lukittu tasauspyörästä, ajaisi vain suoraan. Kuten myös yksinkertainen legomalli kahdella pyörällä, jotka on kiinnitetty samaan akseliin, jos varovaisesti työnnetään, se menee vain suoraan. Mutta entä jos 'ajoalusta ei ole tasainen? No, sitten meidän ajoneuvomme matkustaisi geodeesipolkuja -- esittäen monia lisäkysymyksiä, innoittaen mielikuvitustamme ja haastaen ymmärtämystämme.

HISTORIAA

Ei tiedetä, kuka keksi tasauspyörästämekanismin. Keksintö tuntuu olevan vanhempi kuin monet Leonardo da Vincin (1452-1519) keksinnöistä. Brittiläinen keksijä James Starley (1830-1881), joka tunnettiin nimellä Polkupyörän isä, käytti tasauspyörästämekanismia eräässä erityisessä ompelukoneessa noin vuonna 1850. Vuonna 1877 hän käytti tasauspyörästä ajoneuvossa. Oletettavasti saksalainen Rudolph Ackerman käytti

tasauspyörästöä kulkuneuvossa ensimmäisen kerran vuonna 1810. Monet hienot mekaaniset laitteet, joissa oli tasauspyörästömekanismi, ovat paljon vanhempia. Löydökset Kiinassa todistavat tämän mekanismin olemassaolosta jo vuonna 300. Vuonna 1900 löydettiin äärimmäisen hienostunut Antikytheran mekanismi erään kreikkalaisen laivan hyllystä. Mekanismi oli huolellisesti suunniteltu ja tehty pronssista ja puusta. Se oli eräänlainen astrologinen tietokone, joka laski planeettojen ja tähtien sijaintia. Ja mikä oli kaikkein hämmästyttävintä, laite on ajoitettu ajalle 125 e.a.a. ja siinä oli tasauspyörästömekanismi. Laite on esillä Ateenan Bronze Collection of the National Archaeological Museum - museossa, samalla kun siitä on tehty useita jäljitelmiä, jotka ovat näytteillä ympäri maailman, yleensä tietokone museoissa (kuten esimerkiksi American Computer – museossa Bozemanissa, Montanassa).



Kuva 7. Tärkein osa Antikytheran mekanismista (~125 BC) ja sen uudelleen tehty piirros

Opetusmateriaali:

Jos opiskelijoille esitellään Lego – malleja, se toimii loistavana motivaationa ja keinona ymmärtää käytännöllisesti aritmeettinen keskiarvo. Niiden avulla monet yllä olevat kysymykset ja kommentit tulevat ymmärretyiksi. On melko vaikeaa saada riittävä määrä sopiva Lego - malleja opiskelijoille, jotta he voivat tutkia niitä, mutta aina kannattaa yrittää. On parasta, jos yksi tai kaksi opiskelijaa rakentaa mallin ja muut analysoivat sitä. Aloituksen pitää olla hidas, ja didaktisesti haastava rakentamalla ensin hevosvaunuja, joissa on kaksi pyörää samassa ja eri akseleissa, kuten mainittu aiemmin. Kokeileminen sellaisilla vaunuilla ja mahdollisesti ”kahden henkilön kävelynä”, huomioiden eri nopeudet, tai kokeillen ’rikkoutunutta sosiaalista tasauspyörästöä’ voi tuoda paljon viihdykettä luokkaan, mutta siitä myös oppii paljon. Yllämainitut Lego - tasauspyörästöt esiintyvät joissakin Technics - malleissa ja niitä voidaan hankkia varta vasten oppilaitokselle.

Interaktiivinen simulaatio

Interaktiivinen tietokonesimulaatio auton tasauspyörästöstä on saatavilla Internetissä.