Učno gradivo

Formula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \; (1)$$

odgovori na vprašanje: Kolikšna je dolžina krivulje, ki je dana z enačbo f(x) = y. Da bo naloga lažja, naj bosta f(x) in f`(x) zvezni funkciji na intervalu [a, b].
Brez te formule največkrat odgovora ne poznamo.

Ena izmed izjem je seveda krog. Prav zato mnogi učbeniki preverjajo pravilnost formule tako, da z njo in po že znanih obrazcih za obseg po dveh neodvisnih poteh preverijo ujemenje obeh rezultatov. Tako četrtino obsega kroga najprej izračunajo po obrazcu o/4 = (2πr)/4, ki ga poznajo še iz osnovne šole. Potem se računanja lotijo še po formuli (1), ki jo izpeljejo v zahtevnejših gimnazijskih matematičnih razredih ali v prvem letniku na fakulteti.

Predlagam, da krožnica ne bo edini primer. Z uporabo programa Excel lahko formulo preverimo tudi za parabolo, ki je pravzaprav tir gibanja pri vodoravnem metu.

(Glejte lekcijo: PARABOLA MED MATEMATIKO IN FIZIKO – VODORANI MET)

Enačba parabole je

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Os y je obrnjena navpično navzdol. Izračunali bomo dolžino tira gibanja. Začetna hitrost je 5,0 m/s, gravitacijski pospešek 10,0 m/s^2 in upor zraka zanemarljiv. Začetna koordinata ob izstrelitvi je (0, 0). Denimo, da izstrelek pade na tla po 2,0 sekundah. Koordinati sta tako odvisni od časa:

$$x = v_0 t$$

in

$$y = \frac{gt^2}{2}$$

Točka pristanka je: x = 10 m in y = 20 m. Seveda je trajektorija daljša od razdalje med (0, 0) in (10, 20).

Zveza med x in y je:

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

in

$$y' = \frac{g}{v_0^2} x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{g}{v_0^2} x\right]^2} dx$$

Zaradi krajšega zapisa uvedemo novo konstanto:

$$a = \frac{g}{v_0^2}$$

zato je dolžina trajektorije (tira gibanja) enaka:

$$L = \frac{1}{a} \int_0^{10} \sqrt{a^2 + x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]_0^{10} =$$

= 23,23

kar pomeni, da je to v metrih: L = 23,23 m.

IN PO DRUGI POTI ...

Velikost trenutne hitrosti pri vodoravnem metu se tako spreminja s časom:

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + (gt)^2}$$

Če let izstrelka razdelimo na zelo kratke časovne intervale, lahko privzamemo, da je znotraj vsakega intervala hitrost konstantna. Hitrost znotraj vsakega časovnega intervala tako pomnožimo s časovnim intervalom. Rezultat je premik v tem časovnem intervalu. Sedaj le še seštejemo te premike in dobimo dolžino trajektorije. Izračun premika v enem samem intervalu je lahko opravilo. Ker pa jih moramo izračunati in sešteti zelo veliko, delo prepustimo Excelu.

Zato v delovni list, ki je prikazan na naslednji strani, vpišemo ustrezne vrednosti in potegnemo izračun do vrstice 206. Tako bo čas 2,0 sekunde . Rezultat pa je prav tak, kot smo ga dobili prej: 23,23 m.

	A	B	C	D
1	**časovni interval**		**začetna hitrost**	
2	**0,01**	**s**	**5**	**m/s**
3				
4				
5	**t**	**v**	**delta x**	**L**
6	**0**	**=$C$2**	**0**	**0**
7	**=A6+$A$2**	**=SQRT($C$2^2+(10*A7)^2)**	**=((B7+B6)/2)*$A$2**	**=D6+C7**

To so ukazi, ki jih vpišemo v delovni list.

Seveda bi lahko uporabili Excel tudi namesto integriranja. Tedaj bi napisali:

$$d\ell = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

To pa je seveda le odvod formule (1). In v resnici je to na nek način enako fizikalnemu pristopu, saj je dx = $v_x$dt and dy = $v_y$dt …

Ta projekt se financira s podporo Evropske komisije. Ta publikacija izraža le stališča avtorja ali avtorjev in Komisija ne odgovarja za kakršnokoli uporabo v njej navedenih informacij.